

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren van Liwenagel en van de Wiskunde-werkgroep van de w.v.o.

47e jaargang
1971/1972
no. 3
november

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 15,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 15,—. Hiervoor wende men zich tot:
Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:
Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-129786-30785.

Tarieven: 1/1 pag. *f* 130,—, 1/2 pag. *f* 70,— en 1/4 pag. *f* 40,—.

Zo doe ik het

'De Breuken-T.V.'

P. I. A. KNOPS
Heerlen

In Didaktische Orientatie deel II wijdt Wansink een aantal pagina's aan het onderwerp: breuken. We lezen er oa. 'Hoeveel de leerlingen op de lagere school reeds breuken hebben ontmoet, blijft de voortgezette behandeling ervan voor het voortgezet onderwijs een onderwerp van voortdurende zorg.' (pag 176 ev.)
In Moderne Wiskunde deel I (pag. 202 ev.) worden onze brugklassers weer met dit onderwerp geconfronteerd. Enkele voordelen van de behandeling zijn: plaatsing op de getallen-rechte, het niet vasthouden aan een bepaalde figuur bv. vierkant, de twee-kleurendruk van de methode geeft hier het voordeel, dat de aanschouwelijkheid nog beter tot uitdrukking kan komen. Algemeen is men het erover eens dat konkreet materiaal zeer aan te bevelen is. Ook voor dit onderwerp. Het inzicht kan erdoor verbeterd worden. We hebben dit proberen te bereiken op de volgende manier. De methode wordt verder gewoon gevolgd.
De leerlingen maken zelf op transparant papier een twintigtal 'breukenblaadjes' en wel op de volgende manier:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

zo ook: derden, vierden enz. t/m tienden

$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$

zo ook: derden, vierden enz. t/m tienden

De leerlingen zorgen ervoor deze transparanten steeds ter beschikking te hebben. We geven oefeningen in het optellen van breuken bv. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ en maken de volgende afspraak: 'bij de eerste breuk die je opschrijft behoort het transparant met horizontale verdeling en bij de tweede breuk het transparant met vertikale verdeling'.
Hoeveel stukken zijn het nu geworden als de transparanten op elkaar gelegd worden?
18.
$\frac{1}{3}$ is hoeveel stukken: 6 dus $\frac{6}{18}$

$\frac{1}{6}$ is hoeveel stukken: 3 dus $\frac{3}{18}$

Hoeveel stukken is dat samen? 9 stukken, dus $\frac{9}{18}$

Wat valt je op? $\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$. Pak de transparant van de tweeden en leg die erop. Klopt het? Op deze manier verhelderen we de begrippen: gelijke breuken, gelijknamige breuken enz. Aan deze begrippen kan men zo een meer concrete inhoud geven.

In een later stadium laten we de leerlingen de commutatieve eigenschap ontdekken:

$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}$	=	$\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$
derden horizontaal vierden vertikaal		vierden horizontaal derden vertikaal

Het spreekt vanzelf dat er velerlei oefeningen mogelijk zijn. Het aftrekken gebeurt op dezelfde manier.

Om het geheel nog meer aantrekkelijk te maken. werd het volgende toestelletje gemaakt, de zg. 'breuken-t.v.' In de achterkant van een rechthoekige doos van multiplex bevestigden we een lamp met fitting. Aan de voorzijde werd rondom aan drie zijden een lat bevestigd met twee sponningen van 5 mm. Bij de glashandelaar lieten we een twintigtal rechthoeken van gezandstraald glas (melkglas) snijden, die precies in de twee sponningen geschoven kunnen worden. Op de glazen rechthoeken wordt dezelfde verdeling aangebracht als op de transparanten van de leerlingen. De 'breuken-t.v.' is klaar. Doordat we de glazen rechthoeken in de sponningen voor elkaar kunnen schuiven, kunnen we weer optellen en aftrekken niet breuken. De leerlingen werden erdoor gestimuleerd. Op een andere manier hadden ze weer eens kennis gemaakt met breuken.

Het is interessant om de resultaten van de leerlingen voor de behandeling te vergelijken met de resultaten erna. Heel geschikt hiervoor om dit te toetsen zijn de testbladen 7, 8 van de Schiedamse Rekentest (Heesen, Strelitski, van der Wissel) een uitgave van Wolters-Noordhoff.

Redactie Euclides

Daar de heer Ch. Krijnen niet langer bij het wiskundeonderwijs betrokken is, heeft hij gemeend uit de redactie te moeten treden. Hij had daarin zitting sinds april 1969.
In de ontstane vacature zal voorlopig niet worden voorzien.
Dit i.v.m. de onzekerheid over het voortbestaan van Liwenagel (groep van het Genootschap van Leraren aan Nederlandse gymnasia, lycea en athenea). Het is mogelijk dat er daardoor een wijziging moet komen in de verdeelsleutel voor de aanwijzing van redactieleden door de verenigingen.

Wiskunde en Economie

PROF. DR. A. HEERTJE

Naarden

De heer H. Bolt heeft onlangs in het tijdschrift Euclides de verhouding van de wiskunde en de economie in het kader van het V.W.O. aan de orde gesteld. Hiermede is een begin gemaakt met een uiterst belangrijke discussie, waarvan het einde stellig nog niet in zicht is. Men moet het o.i. zelfs toejuichen indien van een permanente dialoog tussen wiskundigen en economen sprake zal zijn. Wie had enige jaren geleden kunnen denken dat de economie in het voortgezet onderwijs nog eens zo serieus zou worden opgevat, dat de heer Krooshof als wiskundige zelfs van 'te hoge eisen van de kant van de economie' meent te moeten spreken?

Deze opmerkelijke ontwikkeling heeft verscheidene positieve aspecten. De docenten zijn genoopt hun onderwijs op elkaar af te stemmen, zodat voor de leerlingen economie en wiskunde niet als gescheiden compartimenten voor het voetlicht treden. De leerlingen worden geconfronteerd met de omstandigheid dat de wiskunde niet alleen diensten bewijst aan de natuurkunde, maar ook aan de economie. Zodoende worden zij voorbereid op een maatschappelijke situatie, waarin de wiskundige werkwijze ook bij de sociale wetenschappen haar intrede doet. Verder wordt de ervaring opgedaan dat de huidige wiskunde enerzijds kan worden gehanteerd bij het oplossen van economische problemen, maar dat anderzijds vraagstukken van economische aard worden opgeworpen die (nog) niet met behulp van de wiskunde kunnen worden opgelost. Het is een facet van de onderwijsvernieuwing deze didaktisch uiterst belangwekkende situatie niet uit de weg te gaan.

In het kader van het voortgezet onderwijs schuilt de didaktische betekenis van de wiskunde voor de economie echter vooral in het aankweken van een zekere mate van discipline bij het denken over economische samenhangen. Als zodanig vormt de wiskunde een voorbereiding voor de analyse van gecompliceerde economische problemen, voor zover deze in de vorm van modellen worden gegoten. De modelmatige werkwijze is karakteristiek voor de moderne economie en haar toepassingen in de praktijk. De intellectuele moeilijkheden die zich hierbij voordoen schuilen in het 'vertalen' van betrekkelijk vaag geformuleerde economische vraagstukken in een exacte vorm en niet in de formele uitwerking en bewerking van de exacte vorm. Voor dit laatste is de wiskunde als formeel systeem uiteraard van groot gewicht, maar hieruit volgt niet dat ook in de didaktiek bij dit gezichtspunt het accent wordt gelegd. Integendeel, men hoede zich voor een formeel-wiskundige casuïstiek, die het uitzicht op de essentiële economische samenhangen belemmert.

De modernisering van de wiskunde, zoals deze o.m. tot uitdrukking komt in de boeken van G. Krooshof c.s. en K. de Bruin c.s. en die bestaat in een strenge verzamelingstheoretische opzet, sluit als zodanig zeer goed aan bij de modelmatige werkwijze in de economie.

Het denken in structuren, waarbij de interacties tussen hypothesen en conclusies centraal staan, kan als een doorsnijding van moderne wiskunde en moderne economie worden opgevat. De vraag komt zelfs op of in dit opzicht het huidige onderwijs in de economie niet ten achter loopt bij het wiskunde-onderwijs. Voorlopig beantwoorden wij deze vraag ontkennend, omdat de empirische inhoud van de economie voor de leerlingen van vijftien tot achttien jaar een betrekkelijk rechtstreekse beleving vereist. Naarmate in het algemeen echter het abstracte denken voortschrijdt en gemeengoed wordt, zal ook het economie-onderwijs niet kunnen ontkomen aan verdere ontwikkelingen in meer abstracte richting.

Intussen neemt dit algemene perspectief niet weg, dat ook een zekere vingervaardigheid met wiskundige bewerkingen noodzakelijk is. De beschouwingen van de heren Bolt en Krooshof hebben vooral hierop betrekking. Zij vrezen dat deze behendigheid niet in voldoende mate aanwezig zal zijn. Zonder afbreuk te doen aan deze aarzeling zou toch het volgende kunnen worden overwogen, waarbij wij ons ervan bewust zijn dat een zekere wiskundige vaardigheid ook nuttig is voor het denken in structuren.
In de eerste plaats is een groot aantal docenten in de economie betrekkelijk plotseling geconfronteerd met de evolutie van de moderne economie en de consequenties daarvan voor het middelbaar onderwijs. Velen van hen proberen in hun vrije tijd hun kennis te verbreden en te verdiepen, waarbij het aanleren van wiskundige vaardigheid een belangrijke rol speelt. Niet uitgesloten is dat het nog enige jaren duurt alvorens alle economie-docenten over dezelfde kennis van de wiskunde beschikt als zijn leerlingen. Voor de vaak niet geringe moeilijkheden van de docenten dient men begrip te hebben. Verder kan erop worden gewezen dat de introduktie van het rijksleerplan – economie op een geleidelijke wijze geschiedt.
Hierin zien wij een uiting van wijs beleid, daar zodoende ruimte blijft voor experimenten en aanpassingen. Dit houdt ook in dat het verwerven en toepassen van de wiskundige kennis door docenten en leerlingen in een rustige sfeer kan plaats vinden. Tenslotte leert de kennisneming van de hier vermelde boeken, dat het wiskunde-onderwijs in de onderbouw van het V.W.O. zeer ver is voortgeschreden. Zo treffen wij in deel 7 van het boek van Krooshof, dat voor het derde en vierde leerjaar van het V.W.O. is bedoeld, reeds een uitvoerige behandeling van de differentiaalrekening aan, waardoor op een gewenste ontwikkeling wordt vooruitgelopen. Met deze kennis van de wiskunde kan bijna het gehele huidige economieprogramma worden uitgevoerd. Tegenover de gedachte dat velen in de bovenbouw verder geen wiskunde kiezen, kan derhalve worden gesteld dat blijkens deze leerboeken al vrijwel voldoende wiskundige kennis is verworven, terwijl daarnaast niet uit het oog verloren dient te worden dat in de huidige structuur van het V.W.O. de economie op Atheneum – α nu eenmaal de functie vervult van de natuurkunde op Atheneum – β. Men kan derhalve niet uitgaan van de oude

situatie, waarin de economie als een traditioneel A-vak werd gezien en de keuze van de leerlingen veelal door een proces van negatieve selectie werd bepaald.
Aan al deze overwegingen, die wellicht tot een iets optimistischer eindoordeel kunnen leiden, kan nog een gedachte worden toegevoegd.
De heren Bolt en Krooshof gaan er kennelijk vanuit dat in de wiskundeles alle wiskundige technieken zijn behandeld, die in de natuurkunde en de economie aan de orde komen. Dit uitgangspunt lijkt mij in het algemeen juist en zal t.z.t. tot een herwaardering van het wiskunde-programma kunnen leiden. Toch behoeft dit niet in te houden dat binnen het kader van de economie niet een beroep gedaan zou kunnen worden op een onderdeel van de wiskunde dat niet in de wiskunde-les wordt behandeld, mits de leerboeken in de economie dan voldoende uitvoerig zijn.

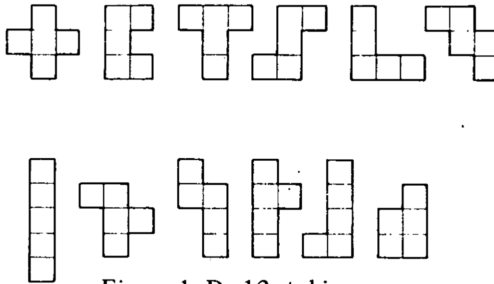
Nemen wij als voorbeeld het werken met eenvoudige, dynamische modellen, waarin grootheden vertraagd op elkaar reageren, zodat differentie-vergelijkingen van de eerste orde resulteren. Het ontstaan van deze finale vergelijkingen en de interpretatie van de oplossing zijn zozeer ingebed in de economische beschouwingswijze, dat het eerst behandelen van de formele theorie van de differentie-vergelijkingen veeleer als afleider fungeert dan als daadwerkelijke voorbereiding op de economie-les. In die gevallen zou een onnodige belasting en ontwrichting van het wiskunde-programma optreden, door al te dogmatisch aan het zoëven vermelde – ook door mij onderschreven – uitgangspunt vast te houden.

Zo komen wij tot de slotsom dat de door de heren Bolt en Krooshof opgeworpen problematiek, terecht onder de aandacht is gebracht. Er is alle aanleiding tot een nadere gedachtenwisseling te komen omtrent de didaktische vragen die rijzen. De meeste problemen zullen kunnen worden opgelost, indien men niet het oogmerk heeft alles in een dag te willen verwezenlijken. Rijksleerplannen, studieprogramma's en structuren, ontworpen door docenten, inspectie en overheid blijven dood materiaal zolang de docenten en leerlingen er geen levende inhoud aan weten te geven. Daarom is de vernieuwing van het onderwijs een zaak die geleidelijk dient te verlopen, zeker voor zover het de economie betreft. Ongetwijfeld zijn de wiskundigen bereid in goede kameraadschap hun collega's in de economie behulpzaam te zijn met het verstevigen van de didaktiek van de economie door het uitwisselen van kennis en ervaring. De economie is op het niveau van het voortgezet onderwijs een volwassen en serieus vak geworden.
Laten wij ons daarover verheugen, in het besef dat wij allen kinderen zijn van één eindige en vermoedelijk compacte verzameling.

Programmeren van de pentomino puzzle

PROF. DR. N.G. DE BRUIJN [1]
Eindhoven

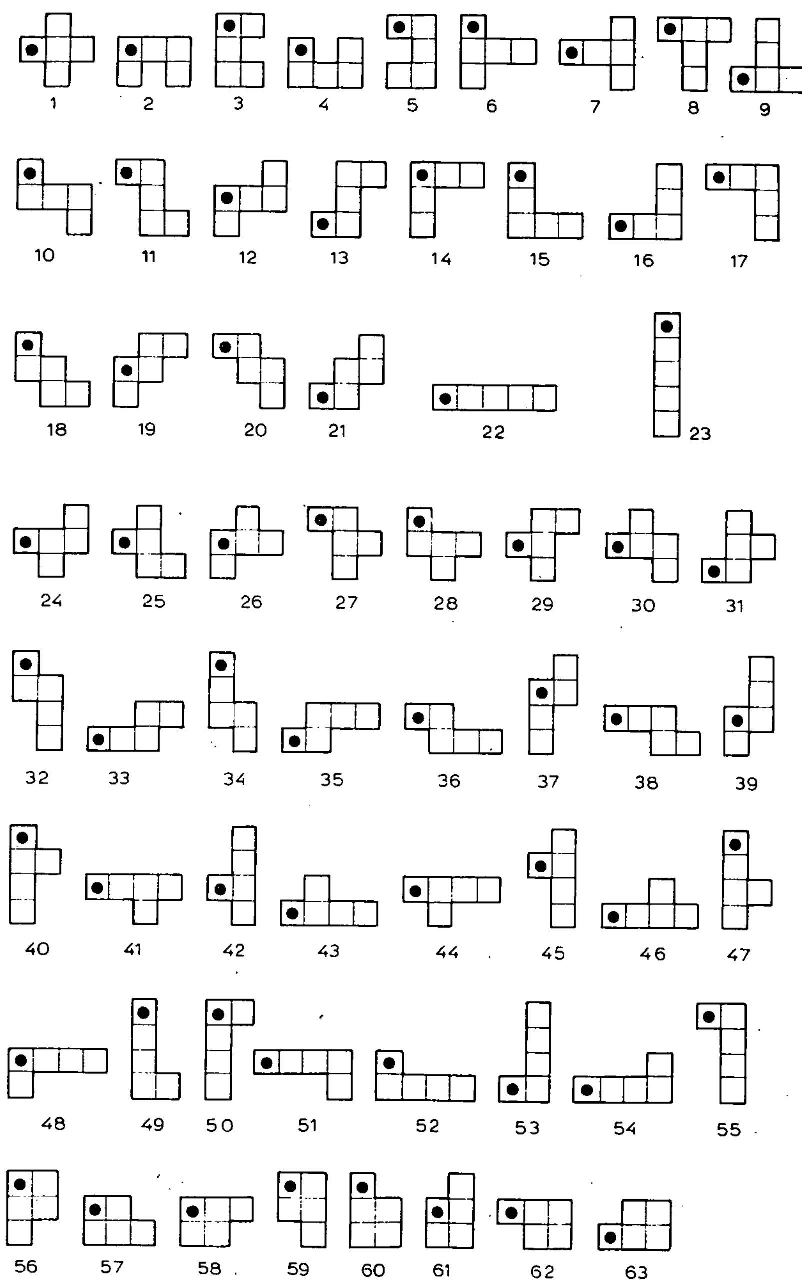
1. We nemen ons voor om met behulp van een computerprogramma alle oplossingen te vinden van de 6 x 10 pentomino [2]. Dit is een legpuzzle, waarbij gevraagd wordt om een rechthoek van 6 lengteeenheden hoog en 10 lengteeenheden breed (het *'bordje'*) te vullen met 12 gegeven *'stukjes'*, getekend in fig. 1. Elk dezer stukjes kan men opgebouwd denken uit 5 eenheidsvierkantjes door aanelkaarplakken langs gehele zijden. In feite zijn het precies alle 12 verschillende stukjes die men zo kan krijgen. Twee stukjes worden gelijk genoemd wanneer ze congruent zijn; ook gespiegelde figuren heten congruent. Dit laatste hangt samen met het feit dat de stukjes mogen worden omgeklapt: ze hebben geen duidelijke vóór of achterkant.



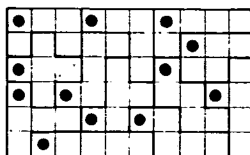
Figuur 1. De 12 stukjes.

Men voelt gemakkelijk aan, en kan met wat moeite ook wel bewijzen, dat in een oplossing een stukje alleen zó op het bord kan komen te liggen dat de eenheidsvierkantjes van het stukje samenvallen met een vijftal van de 60 eenheidsvierkantjes waarin men het bordje verdeeld kan denken. Wanneer men afziet van translaties, kunnen de stukjes, behalve het eerste (het kruis), nog op verschillende manieren op het bordje worden gelegd. Op deze manier ontstaan 63 figuurtjes die we *'plakjes'* zullen noemen, getekend in figuur 2. De in figuur 1 getekende stukjes geven aanleiding tot resp. 1, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 8, 8, 8, 8, 8 plakjes.

2 Men kan aan elke oplossing een serie van 12 plakjes toevoegen zó dat verschillende plakjes verschillende series opleveren. Dit kan op vele manieren gebeuren; we zullen ons houden aan de volgende manier, die we aan de hand van fig. 3 en fig. 4 beschrijven. In de oplossing van fig. 3 gaan we de 60 vierkantjes doorlopen, beginnende met de eerste kolom van boven naar beneden, dan de tweede kolom van boven naar beneden, enz. Iedere keer dat we voor het eerst in een nieuw plakje komen, plaatsen we een *merkteken*, en we noteren de plakjes in de volgorde waarin we ze aantroffen. Dat is gebeurd in figuur 4. We zullen zo'n serie van plakjes een *woord* noemen, de plakjes heten *letters* en de collectie van 63 plakjes heet het *alfabet*.

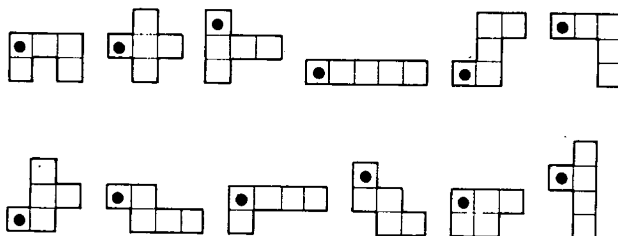


Figuur 2. De 63 plakjes.



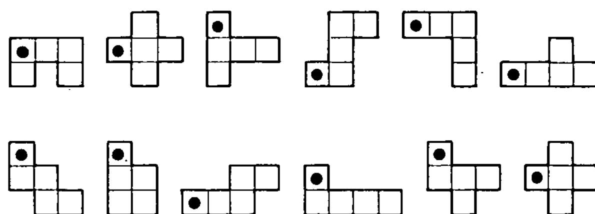
Figuur 3. Een oplossing.

Het is duidelijk dat bij elk plakje het merkteken in de meest links gelegen kolom van het plakje terechtkomt, en in die kolom op het hoogstgelegen vierkant. De ligging van het merkteken op het plakje hangt dus niet van de oplossing af; we kunnen de merktekens op de plakjes à priori aangeven. In fig. 2 is dat gebeurd. Omgekeerd kan men uit het woord van fig. 4 de oplossing uit fig. 3 terugvinden. Men legt het eerste plakje neer met zijn merkteken op het vierkantje links-boven. Men doorloopt de vierkantjes en zoekt het eerste onbezette veld (*'eerstegat'*); men legt het tweede plakje daar met zijn merkteken op. Men doorloopt verder de vierkantjes tot wat nu weer het eerstegat is, en legt daarop het derde plakje neer, enz. Met 'doorlopen' wordt hier natuurlijk bedoeld het aftasten van kolom na kolom, elk van boven naar beneden.



Figuur 4. Het 'woord' van de oplossing van figuur 3.

Niet elke serie van 12 'letters' is een bruikbaar woord. Als we op het woord van fig. 5 het in de vorige alinea geschetste procédé toepassen, loopt het bij het vierde plakje spaak wegens overlapping. Ook op andere wijze zien we dat het woord niet met een oplossing correspondeert: het kruis komt er twee keer in voor! We zullen echter niet naar fouten achter in een woord gaan kijken, en steeds van het begin af aan het woord lezen, en letter na letter acceptabel verklaren totdat we eventueel op een onacceptabele letter stuiten. Onacceptabel kan betekenen (i) het overlapt reeds gelegde plakjes, (ii) het steekt over de rand heen, (ii) het stukje is niet meer beschikbaar omdat we het in de één of andere stand al op het bordje hebben liggen.



Figuur 5. Een 'onuitspreekbaar woord.'

3 Doordat wé woorden van links naar rechts aftasten, kunnen we een parallel trekken met uitspreekbaarheid van een woord bij zekere uitspraakregels. Ook daarbij kunnen we woorden beoordelen door van links af te werken (wanneer tenminste de taal zó is dat een beginstuk van een uitspreekbaar woord ook uitspreekbaar is). Een woord van 12 of minder letters, met het 63-letterige alfabet van fig. 2, zullen we dus *uitspreekbaar* noemen wanneer de plakjes van dat woord achtereenvolgens op het bordje kunnen worden gelegd, volgens de regel van merkteken op eerstegat, en zonder dat enig plakje wegens één der boven genoemde regels (i), (ii), (iii) onacceptabel zou zijn.

4 We beschouwen nu een alfabetisch geordende lijst van alle woorden van 12 of minder letters. De volgorde in het alfabet is die van fig. 2. We zoeken daarin alle uitspreekbare woorden, en in het bijzonder de uitspreekbare van 12 letters. Laatstgenoemde zijn de oplossingen van ons probleem.
Er is geen beginnen aan om de *gehele* woordenlijst door een computer op uitspreekbaarheid te laten testen. Die lijst bevat nl. $63 + 63^2 + ... + 63^{12}$ woorden, en dat zou een snelle hedendaagse computer met het slimste programma nog wel een honderd millioen jaar kosten. De tegenwerping dat we gedurende een groot deel van die periode over véél snellere apparaten zullen beschikken is voor ons op dit ogenblik een schrale troost. Wat echter heel goed mogelijk blijkt, is om een computer alle uitspreekbare woorden te laten doorlopen, en daarvan uit die lijst alle 12-letterige af te drukken. Dat hoeft een snelle computer bij geschikte programmering tegenwoordig niet veel meer dan een half uurtje te kosten.
Om de computer in staat te stellen de uitspreekbare woorden te vinden laten we hem de *testwoorden* doorlopen. Een testwoord is een woord van $\leqslant 12$ letters dat uitspreekbaar wordt door de laatste letter weg te laten. De uitspreekbare woorden zijn dus ook testwoorden. Het lege woord wordt als uitspreekbaar beschouwd, zodat alle woorden van één letter testwoorden zijn.
Héél ruw hebben we nu als programma:

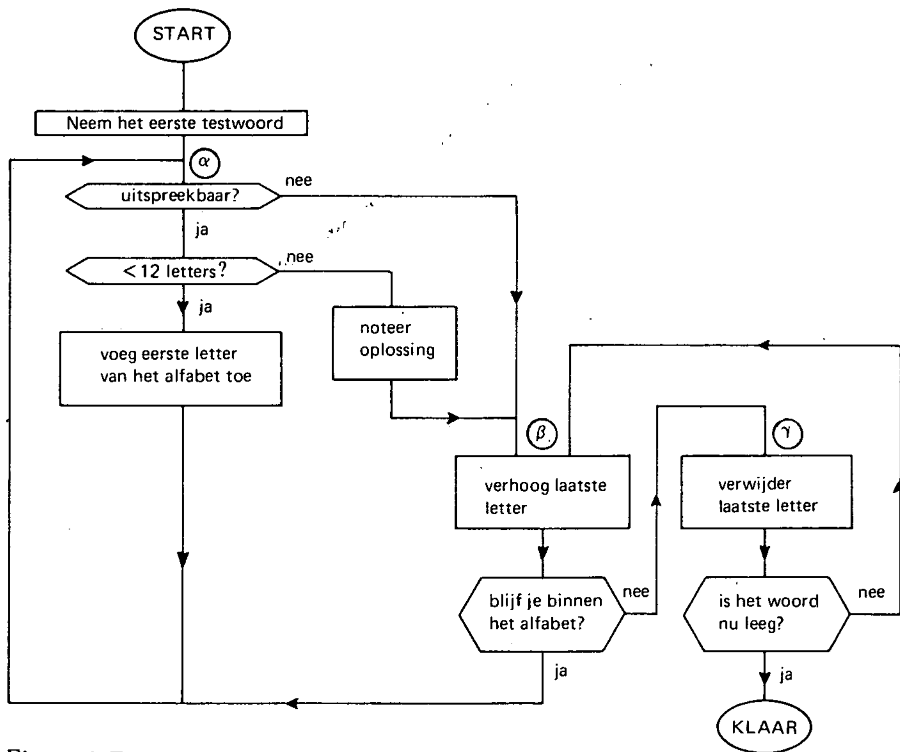
I Begin bij het eerste testwoord.

II Als het beschouwde testwoord een uitspreekbaar woord van 12 letters is, noteer dat dan als oplossing.

III Ga na of er een volgend testwoord is. Is er geen te vinden, dan is de testwoordenlijst beeindigd; is er wèl een, ga dan daarmee naar II.

5 We kijken nu wat er bij III gedaan moet worden. Als ons testwoord van

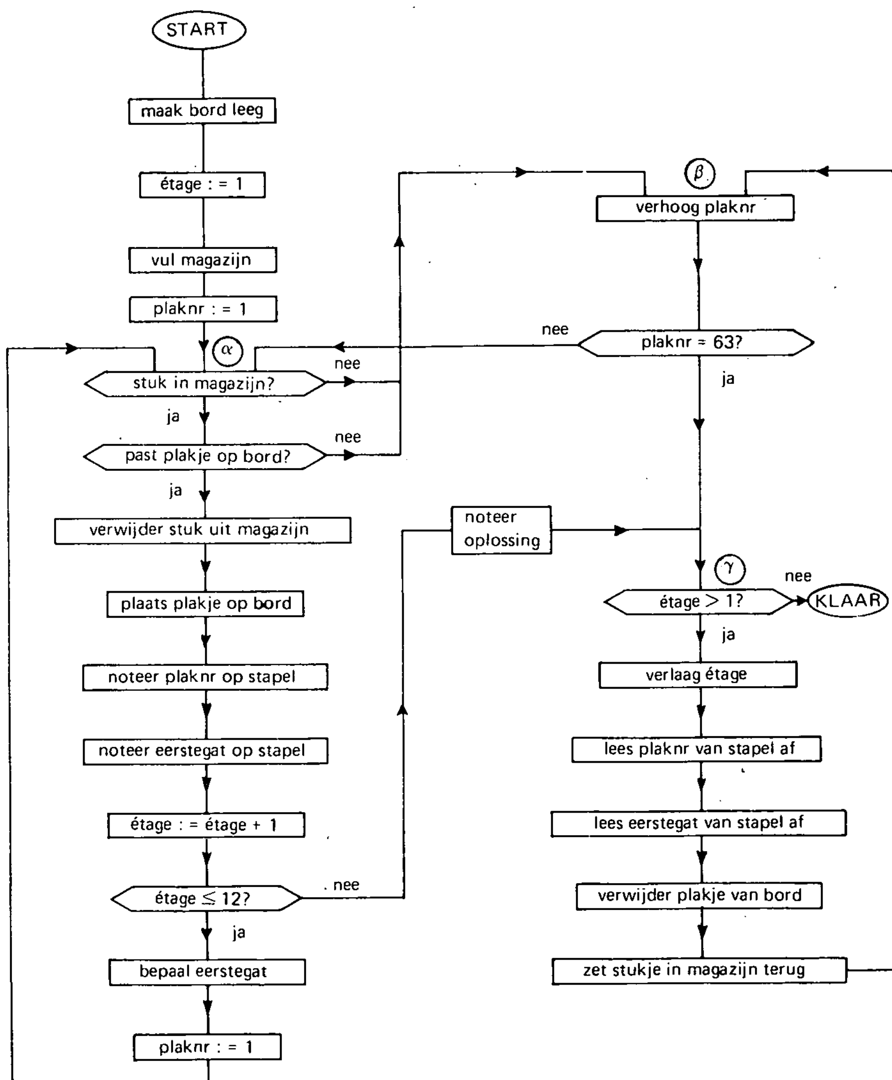
uitgang uitspreekbaar is met minder dan 12 letters, dan wordt het eerstvolgende testwoord verkregen door de eerste letter van het alfabet er achter aan te hangen. In alle andere gevallen wordt het volgende testwoord gezocht door de laatste letter te 'verhogen', d.i. te vervangen door de daarop volgende letter van het alfabet. In het geval dat de laatste letter van het testwoord tevens de laatste letter van het alfabet is, verwijderen we de laatste letter, en we vervangen de laatste letter van het nieuwe woord door de daaropvolgende letter van het alfabet. Wàs het al de laatste letter van het alfabet dan breken we verder af, enz. Zie figuur 6.
Als ons testwoord wèl uitspreekbaar is, maar precies 12 letters heeft, is er geen kans meer op uitspreekbaarheid door de laatste letter te veranderen, want het gat dat door weghalen van het laatste plakje ontstaat, heeft de oppervlakte 5, en daar past geen ander plakje in. Dit betekent dat we iets kunnen overslaan; in het blokschema van fig. 6 kunnen we desgewenst direct van de nee-uitgang van '< 12 letters? ' naar het punt γ lopen i.p.v. naar punt β.



Figuur 6. Eerste blokschema.

6 We willen nu aangeven hoe de vraag 'uitspreekbaar' uit het blokschema van fig. 6 wordt behandeld. Daar de vraag alleen voor testwoorden wordt gesteld is het al bekend dat het alleen nog maar om de laatste letter gaat, want na weglating van die letter is het woord uitspreekbaar. Met dit uitspreekbare stuk correspondeert

een stel op het bord gelegde plakjes (vgl. § 2). We zullen deze 'bordsituatie' niet uit dat woord hoeven op te bouwen, want de wijzigingen in dat woord betreffen alleen maar de laatste letter (toevoeging, weglating of wijziging). We zullen dus steeds de bordsituatie onthouden en bijwerken als dat te pas komt. Verder zullen we een lijst van de letters van het woord moeten bijhouden. Is k het aantal letters van het testwoord, dan moeten we de 1e letter, ..., $(k-1)^e$ letter ergens noteren, alsmede de (misschien niet acceptabele) k^e letter. De rij letters 1^e t.e.m. $(k-1)^e$ wordt de *'stapel'* genoemd. We noemen het een stapel omdat de enige operaties die we uitvoeren zijn: wegnemen van de bovenste resp. bovenop leggen van een nieuwe. De eerste letter ligt onderaan. Het getal k wordt de *etage* genoemd; het is de hoogte waarop we ons voornemen de eerstvolgende letter te plaatsen.



Figuur 7. Nader uitgewerkt blokschema.

7 Als we willen weten of het testwoord van k letters uitspreekbaar is, gaan we uit van de ons bekende bordsituatie van de eerste $k-1$ stukjes, en we kijken of het k^e plakje (met merkteken op het eerste gat) kan worden bijgeplaatst. De bordsituatie geeft aan welke van de 60 velden bezet zijn. Het eerste gat kan daaruit worden bepaald. We doen verstandig dat eerste gat niet iedere keer opnieuw te berekenen, maar het uit de voorafgaande toestand af te leiden. Met het oog daarop is het prettig om op de stapel niet alleen de geplaatste plakjes te vermelden, maar ook van elk plakje de positie die zijn merkteken op het bordje inneemt. Wanneer we dan plakjes aan het eind van het woord weghalen, is het nieuwe eerste gat direct van de stapel af te lezen.
Behalve de stapel, de étage, het nummer van de k^e letter (het *plaknummer*), en het bordje moeten we ook het *magazijn* bijhouden. Dat bestaat uit 12 geheugenplaatsen waarop aangetekend staat welke van de 12 stukjes nog beschikbaar zijn. De uitspreekbaarheid hangt nl. niet alleen af van de plaatsbaarheid van het k^e plakje, maar ook van de vraag of het betreffende stukje al eerder op het bord lag.
We werken nu het blokschema van fig. 6 nader uit tot dat van fig. 7. Op overeenkomstige plaatsen zijn in de blokschema's van fig. 6 en fig. 7 letters α, β, γ bijgeplaatst, opdat duidelijk is hoe fig. 7 uit fig. 6 is ontstaan. (Let op de opmerking gemaakt aan het slot van § 5).

1	8	15						64	71
2	9								72
3									73
4									74
5									75
6								69	76
7	14	21	28					70	77

Figuur 8. Nummering der velden en randvelden.

8 We zullen nu voor de verschillende zaken coderingen gaan kiezen. In de eerste plaats voorzien we het bordje van een onderrand en een rechterrand, en we nummeren de velden als aangegeven in figuur 8. De velden 7, 14, 21, ..., 70 en 71 t.e.m. 77 worden steeds als bezet beschouwd. Dit zal blijken het voordeel te hebben dat de punten (i) en (ii) uit het slot van § 2 op geheel dezelfde wijze worden behandeld. Verder geven we bij elk plakje de vier z.g. *relatieve* posities aan. Van elk vierkantje van het plakje kan nl. de plaats op het bordje worden berekend door bij de plaats die het merkteken inneemt een getal op te tellen dat niet afhangt van de positie van het plakje. Zo zijn bijv. van plakje 21 (zie figuur 9) de relatieve posities 6,7,12,13. Wanneer men probeert dit plakje te plaatsen met merkteken op bordveld 2, dan berekent men door optelling dat nu plaats gevraagd wordt op 8,9,14,15. Die plaats is er niet, want zoals gezegd is veld 14 permanent bezet. Men ziet hoe de velden 7, 14,...., 70 zowel de beveiliging tegen overschrijding van onderrand als bovenrand verzorgen. De linkerrand van het bordje hoeft niet te worden beveiligd, want de relatieve posities zijn altijd positief.
De relatieve posities zullen worden bewaard in vier rijen elk ter lengte 63. Ze heten

relposeen, relpostwee, relposdrie, relposvier. Zo is bijv. relposdrie (21) = 12; het is de derde relatieve positie van plakje 21. (Om te voorkomen dat bordplaatsen > 77 ooit zullen worden geraadpleegd spreken we af dat voor elk plakje de relatieve posities in opklimmende volgorde staan).
Om de magazijnadministratie te kunnen voeren hebben we de rij 'stuknr' ingesteld. Zo is stuknr (12) = 4 omdat het 12^e plakje een stand van het 4^e stukje is.
De genoemde rijen worden gevuld door middel van een *getallenband* die al deze gegevens bevat. Op deze band staan achtereenvolgens de relatieve posities en stuknr van het eerste plakje (6,7,8,14,1), de overeenkomstige voor het tweede plakje (1,7,14,15,2), enz.
Het magazijn is een rij van 12 getallen; magazijn (i) = 1 betekent dat het i-de stukje in het magazijn is, magazijn (i) = 0 betekent dat het i-de stukje op het bordje ligt.



Figuur 9. Relatieve posities bij plakjes 21 en 28.

9 Wanneer men een oplossing van onze puzzle heeft, kan men er direct 3 bijmaken, nl. door rotatie over 180°, door omklapping bijv. om de linkerrand, en daarna nog eens door een rotatie over 180°. We kunnen dus de oplossingen indelen in groepen van 4, en het is voldoende om er uit elke groep één aan te wijzen. Dat doen we door te eisen dat het centrum van het kruis links boven het centrum van het bordje komt te liggen. Dit betekent dat het merkteken van het kruis op één der velden 2,3,9,10,16,17,23,24 komt (het veld 2 kunnen we direct uitsluiten wegens het gaatje dat daarmee op veld 1 zou ontstaan). We splitsen nu onze puzzle in 7 kleinere, al naar gelang deze 'kruisplaats'. Zo wordt bij de eerste puzzle het kruis gefixeerd op de velden 3, 3+6, 3+7, 3+8, 3+14; deze velden worden dan permanent bezet gehouden. En we werken met de plakjes 2 t.e.m. 63 i.p.v. 1 t.e.m. 63.

10 We bespreken nu het in ECOL[3] geschreven programma. Terwille van de discussie hebben we elke ECOL-regel een nummer als label gegeven, en niet alleen aan de regels waarnaar werkelijk in het programma wordt verwezen.
In regel 1 t.e.m. 10 worden de diverse rijen gedeclareerd. We wijzen nog op *'plakstapel'* waarin de nummers van de op het bordje geplaatste plakjes worden bijgehouden, en *'gatstapel'* voor de posities van de merktekens van die plakjes. (We noemen dit 'gatstapel' omdat op het ogenblik van plaatsing van het plakje het merkteken terecht komt op wat op dat ogenblik het eerstegat is.)
In regels 11 t.e.m. 18 wordt gezorgd voor het inlezen van de getallenband.
In regel 19 t.e.m. 25 worden in de § 10 genoemde velden 3,9,10,16,17,23,24 in een rij 'kruisplaats' gezet. Regel 26 initialiseert het oplossingsnummer dat bij elke oplossing zal worden afgedrukt.
Regels 27,28, samen met 116 en 117, regelen de achtereenvolgende kruisposities: In regels 41 t.e.m. 49 wordt het kruis op het bord geplaatst (doordat de getallen

6,7,8,14 in het programma gezet zijn, was het inlezen van deze vier getallen eigenlijk overbodig). Vóórdat dit kruis wordt ingevuld, wordt echter eerst het bord schoongemaakt (regels 29 t.e.m. 32) en de rand gevuld (regels 33 t.e.m. 40).

In regels 50 t.e.m. 54 wordt het magazijn gevuld.

Met regels 55 t.e.m. 58 wordt het veld 1 tot eerstegat gemaakt. (Vanuit regel 84 kan naar regel 56 worden teruggesprongen). In het algemeen zorgen regels 56,57,58 ervoor dat na plaatsing van een nieuw stukje op het bord verder wordt gezocht naar het eerstvolgende veld dat nog vrij is.

Door regel 59 wordt het eerste plakje aangewezen; doordat plakje 1 niet meer meedoet, is 2 het eerste plaknummer.

Bij regel 60 hebben we de in het blokschema met α aangeduide plaats; evenzo corresponderen regels 94 en 96 met β resp. γ.

Regels 60,61,62 vragen of het stuk in het magazijn is, en regel 63 t.e.m. 74 kijken of het plakje past; ingeval van mislukking komen we bij 94 terecht. Als het wèl lukt wordt het stukje uit het magazijn gehaald (regel 75) en het plakje op het bord gezet (76 t.e.m. 80). In 81 en 82 wordt het plakje mèt het op dat moment geldende eerstegat op de stapel genoteerd, en de étage verhoogd om klaar te zijn voor een volgend plakje. Als daardoor de 12e étage bereikt is, is er een oplossing (d.i. 11 plakjes geplaatst) die (met vermelding van oplossingsnummer) wordt afgedrukt. Dit laatste gebeurt in regels 85 t.e.m. 93. Als bij regel 84 het antwoord bevestigend luidt, moet het nieuwe eerstegat bepaald worden en het plaknummer 2 gemaakt worden. Dit gebeurt door verwijzing naar regel 56, hetgeen ons weer naar regel 60 leidt.

Regels 94 en 95 corresponderen met de beide opdrachten uit het blokschema (fig. 7) bij het punt β.

Regel 96 correspondeert met γ. In plaats van 'KLAAR' komen we bij 116 terecht om een nieuwe positie van het kruis in te stellen. Regel 98 leest na het wegnemen van het laatste plakje af wat het eerstegat is: dat was de op 'gatstapel' onthouden positie van het merkteken van het weggenomen plakje. In regel 99 wordt het nummer van het plakje afgelezen, teneinde (via 115) bij 94 het volgende aan de beurt zijnde plakje te kunnen bepalen. Merk op dat bij 97 de étage is verlaagd, maar dat niet de moeite is genomen om eerst de vorige étage schoon achter te laten. Daar wordt immers niets meer afgelezen vóórdat er eerst weer overheen geschreven is.

De regels 100 t.e.m. 114 zijn de 'omkeringen' van 75 t.e.m. 80. Hier volgt nu het programma:

```
   START

1  RIJ (1:63) relposeen
2  RIJ (1:63) relpostwee
3  RIJ (1:63) relposdrie
4  RIJ (1:63) relposvier
5  RIJ (1:63) stuknr
6  RIJ (1:77) bezet
7  RIJ (1:12) magazijn
8  RIJ (1:11) plakstapel
9  RIJ (1:11) gatstapel
```

```
10 RIJ (1:7) kruisplaats
11 k := 1
12 relposeen (k):=LEES
13 relpostwee (k):=LEES
14 relposdrie (k):=LEES
15 relposvier (k):=LEES
16 stuknr (k):=LEES
17 k := k+ 1
18 ALS k > 63 DAN 19 ANDERS 12
19 kruisplaats (1):=3
20 kruisplaats (2):=9
21 kruisplaats (3):=10
22 kruisplaats (4):=16
23 kruisplaats (5):=17
24 kruisplaats (6):=23
25 kruisplaats (7):=24
26 oplnr := 0
27 i := 1
28 j := kruisplaats (i)
29 k := 1
30 bezet (k) := 0
31 k := k+1
32 ALS k > 70 DAN 33 ANDERS 30
33 k := 7
34 bezet (k) := 1
35 k := k+7
36 ALS k > 70 DAN 37 ANDERS 34
37 k := 71
38 bezet (k) := 1
39 k := k+1
40 ALS k > 77 DAN 41 ANDERS 38
41 bezet (j) := 1
42 x := j+6
43 bezet (x) := 1
44 x := j+7
45 bezet (x) := 1
46 x := j+8
47 bezet (x) := 1
48 x := j+14
49 bezet (x) := 1
50 k := 2
51 magazijn (k) := 1
52 k := k+1
53 ALS k > 12 DAN 54 ANDERS 51
54 etage := 1
55 eerstegat := 0
56 eerstegat := eerstegat+1
```

```
57  x := bezet (eerstegat)
58  ALS x = 0 DAN 59 ANDERS 56
59  plaknr := 2
60  x: = stuknr (plaknr)
61  y: = magazijn (x)
62  ALS y = 0 DAN 94 ANDERS 63
63  x := relposeen (plaknr)
64  bewaareen := eerstegat + x
65  ALS bezet (bewaareen) = 1 DAN 94 ANDERS 66
66  x := relpostwee (plaknr)
67  bewaartwee := eerstegat + x
68  ALS bezet (bewaartwee) = 1 DAN 94 ANDERS 69
69  x := relposdrie (plaknr)
70  bewaardrie := eerstegat + x
71  ALS bezet (bewaardrie) = 1 DAN 94 ANDERS 72
72  x := relposvier (plaknr)
73  bewaarvier := eerstegat + x
74  ALS bezet (bewaarvier) = 1 DAN 94 ANDERS 75
75  magazijn (stuknr(plaknr):= 0
76  bezet (eerstegat) := 1
77  bezet (bewaareen) := 1
78  bezet (bewaartwee) := 1
79  bezet (bewaardrie) := 1
80  bezet (bewaarvier) := 1
81  gatstapel (etage) := eerstegat
82  plakstapel (etage) := plaknr
83  etage := etage + 1
84  ALS etage < 12 DAN 56 ANDERS 85
85  NR
86  oplnr := oplnr + 1
87  SCHRIJF (4,0) := oplnr
88  TEKST := ":"
89  k := 1
90  x := plakstapel (k)
91  SCHRIJF (2,0) := x
92  k := k+1
93  ALS k > 11 DAN 96 ANDERS 90
94  plaknr := plaknr + 1
95  ALS plaknr ≤ 63 DAN 60 ANDERS 96
96  ALS etage > 1 DAN 97 ANDERS 116
97  etage := etage − 1
98  eerstegat := gatstapel (etage)
99  plaknr := plakstapel (etage)
100 bezet (eerstegat) := 0
101 x := relposeen (plaknr)
102 y := eerstegat + x
103 bezet (y) := 0
```

```
104  x := relpostwee (plaknr)
105  y := eerstegat + x
106  bezet (y) := 0
107  x := relposdrie (plaknr)
108  y := eerstegat + x
109  bezet (y) := 0
110  x := relposvier (plaknr)
111  y := eerstegat + x
112  bezet (y) := 0
113  x := stuknr (plaknr)
114  magazijn (x) := 1
115  NAAR 94
116  i := i+1
117  ALS i > 7 DAN 118 ANDERS 28
118  TEKST := "klaar"
119  KLAAR
```

GETALLENBAND (bevat 63 x 5 getallen)

6,7,8,14,1,	1,7,14,15,2,	1,2,7,9,2,	1,8,14,15,2,	2,7,8,9,2,	1,2,8,15,3,
7,13,14,15,3,	7,8,9,14,3,	5,6,7,14,3,	1,8,15,16,4,	7,8,9,16,4,	1,7,13,14,4,
5,6,7,12,4,	1,2,7,14,5,	1,2,9,16,5,	7,12,13,14,5,	7,14,15,16,5,	1,8,9,16,6,
1,6,7,13,6,	7,8,15,16,6,	6,7,12,13,6,	7,14,21,28,7,	1,2,3,4,7,	7,8,13,14,8,
6,7,8,15,8,	1,6,7,14,8,	7,8,9,15,8,	1,8,9,15,8,	6,7,8,13,8,	6,7,14,15,8,
5,6,7,13,8,	1,8,9,10,9,	7,13,14,20,9,	1,2,9,10,9,	6,7,13,20,9,	7,8,15,22,9,
1,2,6,7,9,	7,14,15,22,9,	1,5,6,7,9,	1,2,3,8,10,	7,14,15,21,10,	5,6,7,8,10,
6,7,14,21,10,	7,8,14,21,10,	6,7,8,9,10,	7,13,14,21,10,	1,2,3,9,10,	1,7,14,21,11,
1,2,3,10,11,	1,2,3,7,11,	7,14,21,22,11,	1,8,15,22,11,	4,5,6,7,11,	7,14,20,21,11
7,8,9,10,11,	1,2,7,8,12,	1,7,8,15,12,	1,7,8,14,12,	1,7,8,9,12,	1,2,8,9,12,
1,6,7,8,12,	7,8,14,15,12,	6,7,13,14,12,			

11 Het ECOL programma uit § 10 werd in okt. 1969 in het Elektronisch Rekencentrum te Utrecht door de daar beschikbare vertaler in ALGOL omgezet. Met dit programma waren op de EL-X8 na 6 minuten rekentijd de volgende 24 oplossingen gemaakt:

1:	2	6	22	13	17	31	36	48	18	58	45
2:	2	6	22	13	17	31	36	51	62	18	45
3:	2	6	22	13	51	31	18	44	34	16	59
4:	2	6	22	13	51	31	18	44	56	16	39
5:	2	6	22	24	14	11	38	48	63	18	42
6:	2	6	22	24	14	33	13	62	52	19	45
7:	2	6	22	25	10	17	18	38	43	60	55
8:	2	6	22	25	10	38	18	59	54	17	47
9:	2	6	22	25	17	11	36	48	18	58	45
10:	2	6	22	25	17	11	36	51	62	18	45
11:	2	6	22	25	18	44	16	36	59	10	55
12:	2	6	22	25	18	44	16	36	61	10	53
13:	2	6	22	25	18	44	51	36	12	16	59
14:	2	6	22	25	18	51	44	36	12	16	59
15:	2	6	22	25	18	62	33	46	54	17	11
16:	2	6	22	25	18	62	44	13	52	16	37
17:	2	6	22	25	32	11	59	41	20	15	53
18:	2	6	22	25	32	20	15	11	41	54	59
19:	2	6	22	25	32	20	15	11	51	46	59
20:	2	6	22	25	32	20	15	51	13	46	59
21:	2	6	22	25	32	20	52	44	11	16	59
22:	2	6	22	25	32	51	11	15	46	20	59
23:	2	6	22	25	48	10	20	41	17	37	61
24:	2	6	22	25	48	10	20	41	17	60	32

(De lezer zal gemakkelijk met behulp van de plakjeslijst uit fig. 2 de oplossingen kunnen leggen, mits hij er rekening mee houdt dat in deze oplossingen het merkteken van het kruis gefixeerd is op veld 3).

De snelheid is misschien teleurstellend. Het soort ALGOL dat de ECOL-ALGOL vertaler produceert, en de wijze waarop daarvan weer machinetaal gemaakt wordt zijn voor combinatorische programma's veel minder geschikt dan voor programma's met veel numeriek rekenwerk. Men zou kunnen verwachten dat bij zeer goed overwogen programmering, direct in de machinetaal, op de rekentijd een factor 50, of althans iets van die orde, zou kunnen worden gewonnen.
Velen hebben, onafhankelijk van elkaar, het aantal oplossingen van de 6 x 10 pentomino (met centrum van het kruis, linksboven het centrum van het bordje) vastgesteld op 2339. Zo men wil, kan men dus het totale aantal oplossingen 4 x 2339 = 9356 noemen.
In maart 1963 werd het aan de T.H. Eindhoven gedaan op een machine die men thans klein en langzaam kan noemen (IBM 1620). Het gebeurde met een zeer lang programma in machinetaal, dat zelf grotendeels door de computer zelf (met behulp van een programma-genererend programma) werd gemaakt. Het kostte 18 uur rekentijd.

12 Degenen die vertrouwd zijn met ALGOL zullen misschien liever een ALGOL-programma zien in plaats van het ECOL-programma. Het onderstaande is *niet* het ALGOL-programma dat de ECOL-ALGOL-vertaler van het ECOL-programma maakte. Integendeel, de auteur heeft uit het onderstaande programma (door vertaling met de hand) het ECOL-programma gemaakt.
In dit ALGOL-programma komt de niet-gedeclareerde procedure 'drukoplossinggaf' voor. We laten in het midden op welke manier deze output wordt verzorgd.
De getallenband is dezelfde als bij het ECOL-programma.

```
begin       integer array relpos [1:63, 1:4], stuknr [1:63], bezet [1:77],
            magazijn [1:12], plakstapel [1:12], gatstapel [1:12];
            integer etage, plaknr, eerstegat, i,k,j;
            for k:=1 step 1 until 63 do
                      begin for i :=1 step 1 until 4 do relpos [k,i] := read;
                                stuknr [k] := read
                      end;
            for j:= 3,9,10,16,17,23,24 do
            begin for k := 1 step 1 until 70 do bezet [k] := 0;
                      for k:= 7 step 7 until 70 do bezet [k] := 1;
                      for k:= 71 step 1 until 77 do bezet [k] := 1;
                      for k:= 0,6,7,8,14 do bezet [j + k] := 1;
                      for k:= 2 step 1 until 12 do magazijn [k] := 1;
                      etage : = 1; eerstegat : = 0;
nieuwgat:             eerstegat := eerstegat + 1;
                      if bezet [eerstegat] = 1 then goto nieuwgat;
                      plaknr := 2;
vulpoging:            if magazijn [stuknr [plaknr] ] = 0 then goto volgendplakje;
                      for i := step 1 until 4 do
                           if bezet [eerstegat + relpos [plaknr, i] ] = 1 then
                                     goto volgendplakje;
                      magazijn [stuknr [plaknr]] := 0; bezet [eerste gat] :=1;
                      for i:= step 1 until 4 do
                           bezet [eerstegat + relpos [plaknr, i] ] := 1;
                      gatstapel [etage] := eerstegat; plakstapel [etage] := plaknr;
                      etage := etage + 1; if etage <12 then goto nieuwgat;
                      drukoplossinggaf; goto poets;
volgendplakje:        plaknr := plaknr + 1;if plaknr ≤63 then goto vulpoging;
poets:                if etage >1 then

            begin     etage := etage – 1;eerstegat := gatstapel[etage];
                      plaknr := plakstapel [etage];
                      bezet [eerstegat] := 0;
                      for i := 1 step 1 until 4 do
                           bezet [eerstegat + relpos [plaknr,i] ] := 0;
                           magazijn [stuknr [plaknr] ] := 1; goto volgendplakje
```

13. Wij hebben in het voorafgaande geprobeerd het programma begrijpelijk te houden ter wille van de presentatie, en hebben een aantal voor de hand liggende rekentijd-besparende wijzigingen vermeden. Een voorbeeld: als op een gegeven ogenblik het 12^{e} stukje niet in het magazijn zit, wordt in ons programma 8 keer een plakje geprobeerd, (nl. de plakjes 56 t.e.m. 63). Dat gaat in ons ECOL-programma (en ons ALGOL-programma is wat dit betreft niet beter) via regels 60,61,62,94,95, en dat acht keer! Het is niet moeilijk hier wat tegen te doen. Een ander geval: Men kan zonder ongelukken de regels 76 en 100 schrappen. Wanneer men nl. een nieuw plakje probeert te leggen (met merkteken op eerstegat) kan dit wèl een vroeger gelegd plakje overlappen, maar dat kan nooit op het merkteken van dat plakje gebeuren.

14 Tenslotte merken we op dat ons zoekproces door middel van opbouw en afbraak een bijzonder geval is van wat men backtracking[4] noemt. Men kan dat beschrijven als het doorlopen van een 'puzzleboom' (hier de boom der testwoorden), maar ook als het sprongsgewijs doorsnuffelen van een woordenlijst, zoals in deze voordracht is gebeurd.

Voetnoten

1 Tekst van een voordracht gehouden in de Cursus 'Computerkunde' op 12 september 1969 te Eindhoven; herhaald op 6 januari 1970 te Utrecht.

2 Voor meer gegevens over deze puzzle en aanverwante puzzles verwijzen we naar: S.W. Golomb, Polyominoes, Charles Scribner's Sons, New York 1965.

3 Een beschrijving van de programmeertaal ECOL is te vinden in: C.A.Ch. Görts, S.G. van der Meulen, A. van der Sluis, J.R. Zweerus, Computerkunde 1, voor a.v.o. en v.w.o., Wolters-Noordhoff, Groningen 1970.

4 Zie 'Computerwiskunde' (red. J.J. Seidel). Aula-reeks nr. 407, 1969. Blz. 75-89.

Korrel CLXXVI

An interesting theorem

Let $v_p(n)$ be the exponent of the highest power of the prime p by which the positive integer n is divisible. To compute $v_p\left(\binom{n+m}{m}\right)$ represent m and n to base p (e.g. $m = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$; $0 \leqq a_i < p$) and add. Then $v_p\left(\binom{n+m}{m}\right)$ is the number of 'carries' [1] in this addition.
Solution. It is well known that $v_p(m!) = \sum_{i=1}^{\infty} [m/p_i]^2$; upon substituting the expansion of m to base p we find

$$v_p(m!) = a_1 + a_2(p+1) + a_3(p^2+p+1) + \ldots =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{p^i-1}{p-1} = \frac{1}{p-1}(m - s_p(m)),$$

where $s_p(m)$ is the sum of the digits of m in its expansion to base p. Hence,

$$v_p\left(\binom{m+n}{m}\right) = \frac{1}{p-1}(s_p(m) + s_p(n) - s_p(m+n)).$$

Let now $n = \sum b_i p^i$ and $m+n = \sum c_i p^i$ be expansions to base p.
Then $c_i = a_i + b_i + \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i p$ ($i = 0, 1, \ldots$, where $\varepsilon_1 = 0$, and $\varepsilon_i = 0$ or 1.
There is a 'carry' if $\varepsilon_i = 1$.
The result follows now:

$$v_p\left(\binom{m+n}{m}\right) = \frac{1}{p-1}(\sum \varepsilon_i(p-1)) = \sum \varepsilon_i.$$

A. Nijenhuis

University of Pennsylvania
Philadelphia

[1] Bij optelling is een 'carry' een transport (het 'onthouden' zoals we op de basisschool zeggen) (red.).

[2] [ ] duidt de entierfunctie aan; het getal $[x]$ is dus het grootste gehele getal dat x niet overtreft (red.).

Korrel CLXXVII

Een andere oplossing voor recreatie 252.

De tekst van recreatie 252 uit het januari-nummer van jaargang 46 luidde, een beetje gewijzigd, aldus:
V is een verzameling jongens en W een verzameling meisjes. Elke jongen uit V heeft één of meer meisjes uit W tot vriendin. Voor elke p geldt verder, dat p jongens steeds samen ten minste p meisjes tot vriendin hebben. Gevraagd wordt te bewijzen, dat het mogelijk is, dat elke jongen met één van zijn vriendinnen trouwt.

De volgende oplossing is direct, in tegenstelling tot de 'officiële' in het februari-nummer en laat tevens zien, dat er in het algemeen meer dan één mogelijkheid is.
We verdelen de verzameling V aldus:
A bevat de jongens, die maar één vriendin hebben.
B bevat de paren jongens j en j', die ieder twee meisjes m en m' tot vriendin hebben en *geen andere.*
C bevat de overige jongens.

We laten nu een jongen j uit A met zijn enig-geliefde meisje m trouwen. Dit kan niet tot gevolg hebben, dat er nu p jongens te vinden zijn, die samen maar $p-1$ vriendinnen hebben, omdat dan vóór het huwelijk deze p jongens en j samen maar p vriendinnen zouden gehad hebben. Wel kunnen door dit huwelijk verplaatsingen optreden. Als b.v. een jongen j' uit C alleen de meisjes m en m' tot vriendinnen had, dan houdt hij nu alleen m' over; hij moet dus naar A worden verplaatst, maar nog beter kunnen we hem meteen laten trouwen.
Als de jongens j' en j'' uit C ieder de meisjes m' en m'' tot vriendinnen hadden, en j' bovendien nog m, terwijl de jongens verder geen vriendinnen hadden, dan moeten dit paar jongens naar B overhevelen. We gaan op deze wijze door tot A leeg is.

We laten nu de jongens j en j' uit B, die *elk* de meisjes m en m' tot vriendinnen hadden, trouwen; dit kan nog op 2 manieren.
Op dezelfde wijze als zoëven volgt dat de resterende jongens en meisjes aan de gegevens blijven voldoen, terwijl er ook weer verplaatsingen zijn uit C naar A en B.

Nu laten we een jongen j uit C trouwen met één van zijn vriendinnen m. Daar elke jongen uit C ten minste 2 vriendinnen heeft, kan dit weer op ten minste 2 manieren. Er schijnt nu een moeilijkheid te komen, doordat misschien de jongens j' en j'' samen alleen maar één meisje m' tot vriendin overhouden; dan zouden echter vóór het huwelijk j' en j'' ieder m en m' tot vriendinnen hebben en *geen andere;* maar dan waren ze naar B overgeplaatst en dus nu al op huwelijksreis. Evenmin kunnen nu p jongens maar $p-1$ vriendinnen hebben, omdat dan ten minste 2 jongens samen maar één vriendin zouden hebben en dit is zojuist onmogelijk

bevonden. Weer volgen verplaatsingen naar A en B, maar we gaan rustig op de ingeslagen weg door, tot alle jongens gelukkig getrouwd zijn. Proficiat! !

Een en ander is ook aardig met de bekende tekens bij afbeeldingen toe te lichten, zodat ik meen dat bovenstaande oplossing in de klas behandeld kan worden. Daar bij elke trouwerij uit B en bij sommige uit C meer dan één mogelijkheid is, zal het aantal mogelijkheden vrijwel steeds meer dan één zijn. Alleen dan, als in het begin B en C leeg zijn, is er maar één mogelijkheid.

P. Bronkhorst
Eindhoven.

AMERICAN HOST PROGRAM
voor Nederlandse leerkrachten

Het Nederland-Amerika Instituut deelt mede, dat de American Host Foundation, Inc., te New York, voor de zomer 1972 met zijn AMERICAN HOST PROGRAM wederom de gelegenheid tot kennismaking met het Amerikaanse leven biedt aan een groot aantal Nederlandse leerkrachten, in de vorm van een gastvrij verblijf van één maand in de Verenigde Staten.

De deelnemers gaan per vliegtuig naar New York, waar men twee à drie dagen verblijft. Daarna logeert men vier weken bij een of twee Amerikaanse gezinnen.

Voorlopige vertrekdata:

GROEP I	–	5 juli naar New York, 6 augustus uit New York
GROEP II	–	19 juli naar New York, 20 augustus uit New York
GROEP III	–	2 augustus naar New York, 3 september uit New York

De aan het programma verbonden kosten variëren al naar gelang van het gedeelte van de Verenigde Staten, waaraan men de voorkeur geeft:

a.	het Oostelijke gedeelte	\$ 325
b.	het Middenwesten en/of het Zuiden	\$ 450
c.	het Westen	\$ 625

Deze bedragen dekken alle kosten (inclusief het verblijf in New York), behalve zakgeld (± \$ 200).

Nadere inlichtingen en formulieren betreffende dit programma kunnen tot uiterlijk 15 januari 1972 worden aangevraagd bij:

Nederland-Amerika Instituut
Museumplein 4
Amsterdam, tel. 020-722280

Huiswerk

Zie Euclides, 46, blz. 263, vraag 3.

Oorzaak: De tafelrekenmachines doen hun intrede.
Gevolg: De rekenliniaal is uit de tijd.

Weerlegging van deze drogredenering:

De prijs van een rekenliniaal bedraagt 10 tot 50 gulden. De prijs van een eenvoudige tafelrekenmachine varieert van 4.000 tot 10.000 gulden.

Het aantal onderzoekers, dat regelmatig om een snelle berekening van meetresultaten verlegen zit, is in ieder geval zo groot dat niet te verwachten is dat er binnen afzienbare tijd voldoende van deze tafelrekenmachines voorhanden zijn. Zo'n machine kan bovendien maar door één persoon tegelijk gebruikt worden, zodat de rekenliniaal dan zeker bij de tijd zal zijn en blijven. De ontkenning van het verband tussen oorzaak en gevolg berust dus louter op financiële motieven.
Op de school is de rekenliniaal een nuttig instrument. Het valt namelijk zeker niet te verwachten dat de scholen in een zodanige mate over rekentuig zullen beschikken, dat daarmee alle berekeningen van alle leerlingen uitgevoerd kunnen worden.

De behandeling van en het werken met de rekenliniaal op de school moeten dus tot een nuttige bezigheid geacht worden. Tevens wil ik er vooral voor pleiten de rekenliniaal niet in een TE vroeg stadium in te voeren. Dat zou namelijk tot gevolg hebben, dat er een generatie zou ontstaan, die elke vaardigheid in elementair rekenen zou missen.

R. Leentfaar
Barendrecht

Het I.O.W.O.

Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs
van de C.M.L.W.,
Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde

De C.M.L.W., ruim tien jaar geleden opgericht, heeft in de loop van de jaren leerplanontwikkeling en heroriëntering verricht op verschillende niveau's, in de laatste tijd tot de basisschool toe.
Het werk werd tenslotte zo omvangrijk, dat het in een instituut moest worden ondergebracht, dat administratief aan de Rijksuniversiteit Utrecht is toegevoegd. Dit geschiedde in januari 1971. In de loop van 1971 is het aantal wetenschappelijke medewerkers sterk uitgebreid (van 6 tot 21). Het Instituut, I.O.W.O. genaamd, verhuisde in Utrecht van de Uithof naar Overvecht, Tiberdreef 4 (bij het station Overvecht).
De verhouding C.M.L.W./I.O.W.O. dient opnieuw te worden bezien. De taak van het I.O.W.O. is leerplanontwikkeling wiskunde 4 – 18 jaar, gecombineerd met kadervorming ten behoeve van de heroriëntering van onderwijzers en leraren, alsmede voortzetting van het door de C.M.L.W. begonnen werk. De taak zal in samenwerking met alle hiervoor in aanmerking komende instellingen en instanties worden vervuld.
Het I.O.W.O. heeft de volgende afdelingen:

1 Kadervorming, Leerplanontwikkeling, Samenwerking
2 Kleuter- en basisonderwijs
3 Algemeen voortgezet onderwijs
4 Hoger Beroepsonderwijs
5 Lager en Middelbaar Beroepsonderwijs
6 Speciale onderwerpen

De sterkste groei vertoont op het ogenblik de afdeling Kleuter- en basisonderwijs, dank zij het ambitieuze projekt Wiskobas. De activiteiten spelen zich hier op vijf niveau's af: Leerlingen basisschool, onderwijzers, leerlingen pedagogische academies, leraren pedagogische academies, centraal kader. Aan een ontwerpschool wordt leerstof geschapen en voor het eerst beproefd; deze leerstof wordt in de heroriëntering van de onderwijzers(plm 40 scholen) gebruikt door de 17 regionale Wiskobas-werkgroepen, waaraan leraren Pedagogische academies, Schooladviesdiensten enz. medewerken. Overeenkomstig materiaal wordt voor de pedagogische academies geschapen. Op den duur zullen ook de ouders in de innovatie worden betrokken. Er zijn plannen om bij de innovatie de televisie in te schakelen.
Een andere sector waarin een snelle ontwikkeling heeft plaats gehad, is het H.B.O. Een subcommissie Wiskunde en Informatica H.B.O. is actief in programma-ontwikkeling en heroriëntering van leraren, in het bijzonder ook in de opleiding ten behoeve van de Informatica.
Aan het L.&M.B.O. moet in de volgende jaren veel aandacht worden besteed, zowel wat heroriëntering als ook wat de schepping van doelmatiger leerstof betreft. Hiervoor zijn ontwikkelingsteams aan de gang.
In het A.V.O. worden de werkzaamheden voortgezet om te zijner tijd op een nieuwe leest te worden geschoeid.

Als speciale onderwerpen zijn op het ogenblik de heroriëntering statistiek, computerkunde en toegepaste wiskunde het meest urgent.
Het is de bedoeling om de ene of andere meer officiële 'openings'-plechtigheid te doen plaats vinden.

STAATSEXAMEN GYMNASIUM 1970

Uit het examenverslag

Wiskunde

Het gemiddelde van de dit jaar door de A-kandidaten behaalde cijfers voor de algebra bedraagt 5,3, voor de meetkunde 5,4.
Vorig jaar waren beide gemiddelden 5,3.
Van de 204 kandidaten kregen er 107 een onvoldoende voor algebra en 101 een onvoldoende voor meetkunde.
Opvallend waren de slechte resultaten bij de examinandi die in de geschiedenis van de wiskunde werden geëxamineerd. Slechts 2 van de 14 behaalden een voldoende. De moeilijkheidsgraad van dit onderdeel en ook van de statistiek wordt sterk onderschat. Het is niet toereikend wanneer de kennis zich beperkt tot de namen van enkele Griekse wiskundigen en de tijd waarin ze leefden. Statistiek omvat meer dan alleen beschrijvende statistiek.
Tot het onderwerp logaritmen en rijen behoort het gebruik van logaritmentafel of rekenliniaal.
Bij het oplossen van twee vergelijkingen met twee onbekenden bleken veel kandidaten nooit gehoord te hebben van eliminatie door substitutie.
Bij het vak planimetrie kwamen ernstige leemten in de kennis aan het licht, wanneer gevraagd werd naar onderwerpen als: verhouding van oppervlakten, het verband tussen hoeken en bogen, meetkundige verzamelingen. Nogmaals wordt erop gewezen, dat gebruik van de formule $R = \frac{abc}{4O}$ door de subcommissie niet gewaardeerd wordt.
Alle toekomstige A-kandidaten wordt aangeraden zich goed op de hoogte te stellen van de exameneisen en van de opmerkingen die ter toelichting in voorafgaande examenverslagen zijn gemaakt.
Bij de B-examens bleef het merendeel van de examinandi onder de maat. Dit bleek al bij het corrigeren van het schriftelijk werk, waarvan bijna 60% onvoldoende was. Bij het mondeling examen werd het totaalbeeld weinig veranderd. De gemiddelden zijn: voor de algebra 5,5 (vorig jaar 6,0), voor stereometrie 6,0 (vorig jaar 6,3), voor goniometrie en analytische meetkunde 5,4 (vorig jaar 5,7).

Mathematica & Paedagogia

Zoals bekend kunnen lezers van Euclides, die lid zijn van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel of van de W.V.O. een abonnement krijgen op het Belgische tijdschrift Mathematica & Paedagogia. Dit tijdschrift is het officiële orgaan van de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren.
De prijs van het abonnement is verhoogd, zodat men voor de komende jaargang *f* 11,– zal moeten betalen.
Ik neem zonder tegenbericht aan, dat degenen die zich als abonnee opgegeven hebben, ook abonnee wensen te blijven. Mocht u uw abonnement willen opzeggen, dan is daartoe gelegenheid tot 1 december a.s. bij ondergetekende.
De abonnees wordt vriendelijk verzocht voor 1 december f 11,– te storten op giro 902434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Oosterbeek.
Men kan zich voor een nieuw abonnement opgeven door bovengenoemde storting te verrichten en te vermelden: nieuwe abonnee..

P.G.J. Vredenduin Van Wassenaerheuvel 73 Oosterbeek.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren zal in november drie regionale voorlichtingsbijeenkomsten organiseren over het Wiskobas-project (moderne wiskunde op de basisschool), waar alle belangstellenden welkom zijn.
Als sprekers zullen optreden de heren E. Wijdeveld en F. Goffree.
De bijeenkomsten worden gehouden:

Op 8 november te Haarlem,	Coornhertscholengemeenschap Crysanthemumlaan 18 (bij de Westelijke Rondweg),
op 15 november te Breda,	R.K.Scholengemeenschap 'Mencia de Mendoza' Mendelssohnlaan 1 (aan de zuidrand van Breda)
op 22 november te Meppel,	Rijksscholengemeenschap Zuideinde 76

Het programma van deze bijeenkomsten is:

17.00 – 18.00 uur	inleiding
18.00 – 18.45 uur	broodmaaltijd
18.45 – 19.30 uur	discussie.

Degenen, die aan een van deze bijeenkomsten wensen deel te nemen kunnen zich tot 14 dagen voor de bijeenkomst opgeven door storting van vijf gulden op postgirorekening 143917 ten name van 'Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam', onder vermelding 'Wiskobas' en de plaats van de bijeenkomst die zij wensen bij te wonen.
In het bedrag van vijf gulden is de broodmaaltijd inbegrepen.

Boekbespreking

H. Gnirk, G. Homann en U. Lubeseder, *Strategiespiele für die Grundschule*, 63 blz. ingen. DM 4,25;Schroedel Verlag, Hannover 1970

Strategiespelletjes hebben vanouds op de belangstelling van wiskundeleraren kunnen rekenen. Meer dan een kwart eeuw geleden schreef *Schuh* zijn *'Wonderlijke problemen, Leerzaam tijdverdrijf door puzzle en spel'*, maar zoals de titel reeds duidelijk deed uitkomen bleef de auteur met zijn werk geheel in de recreatieve sfeer. Er werd op gewezen dat de wiskunde belangrijk was voor het goed leren puzzelen, er bleek niet uit dat het puzzelen van betekenis zou kunnen worden voor een verantwoord wiskunde-onderwijs. Didactische consequenties voor het wiskunde-onderwijs werden niet getrokken.
De modernisering van ons wiskunde-onderwijs voor alle schooltypen heeft ertoe geleid dat de betekenis die denkspelletjes voor de ontwikkeling van het wiskundig denken kunnen hebben meer en meer wordt erkend en dat ernaar gestreefd wordt deze spelletjes een plaats in ons onderwijs te geven. Men slaagt erin tal van spelletjes te benutten om gewenste cognitieve gedragspatronen te doen ontstaan, om het logisch denken te doen bevorderen, structuren bloot te leggen. We herinneren hier slechts aan het succes dat *Dienes* met zijn logi-spelen reeds heeft gehad en aan de activiteiten van *Goffree* e.a. onder anderen in het experiment *Wiskobas*, waarin ook spelletjes in hoge mate geschikt bleken om zelfstandige denkarbeid te stimuleren.
Het boekje *Strategiespiele* bevat een dertigtal in moeilijkheid opklimmende denkspelletjes, voor de helft éénpersoonsspelen, voor de rest spelletjes met partner. Bij elk ervan wordt een opgave verstrekt van het te gebruiken materiaal, van de beginsituatie, van het einddoel, van de spelregels. De gunstigste strategie wordt toegelicht, literatuur over het onderwerp wordt verstrekt. Onder de ruim twintig auteurs naar wier werk wordt verwezen treffen we bekende namen aan: Martin Gardner, Kowalewski, Lietzmann, Roth, Schubert, Steinhaus.
De spelletjes worden geacht in moeilijkheid op te klimmen. Eén van de eerste heeft betrekking op de Toren van Hanoi, een der laatste gaat over het nimspel. In de reeks treffen we schuifproblemen aan, kaartspelletjes, luciferproblemen, opgaven inzake magische kwadraten, cijferopgaven, topologische problemen.
Het boekje is geschreven voor onderwijzers bij het basisonderwijs, voor de ouders van de leerlingen van deze scholen, voor docenten bij het voortgezet onderwijs.
Gaarne bevelen we het boekje in ieders belangstelling aan.

Joh. H. Wansink

Prof. Dr. Heinz Griesel, *Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten*, Eerste deel, 312 blz.; geb. DM 19,80; Schroedel Verlag, Hannover 1971.

Dit boek is in de eerste plaats geschreven ten behoeve van de onderwijzers bij het basisonderwijs. De modernisering van het wiskunde-onderwijs op de middelbare school begonnen heeft zijn onontbeerlijk complement in de modernisering van het 'rekenonderwijs' aan jongere leerlingen. En deze voortgezette modernisering is overal op gang. Wat Duitsland betreft wordt dit geaccentueerd door de nieuwe *'Rahmenrichtlinien des Kultusministerkonferenz'* van 1968 die met ingang van het schooljaar 1972-1973 van kracht zullen worden. In verband met de scholing en herscholing van de onderwijzers die bij het basisonderwijs betrokken zijn is Griesels boek van grote betekenis. Het is allereerst geschreven met het oog op de problematiek van de Duitse 'Grundschule' met de daaropvolgende vijfde en zesde leerjaren, dat is dus juist de leeftijdsgroep van het Nederlandse basisonderwijs.
Het boek geeft allereerst vakwetenschappelijke documentatie. In dit eerste deel zijn de onderwerpen Mengen, Zahlen, Relationen, Topologie aan de orde, het tweede deel zal gewijd

zijn aan de behandeling van Gröszen, rationale Zahlen, Gruppen. De diverse hoofdstukken worden besloten met didactische beschouwingen in verband met de nieuwe leerstof, terwijl over de gehele tekst verspreid ook didactisch commentaar wordt aangetroffen. Terecht wijst de auteur erop dat voor een afgeronde didactiek en methodiek de tijd nog niet rijp is. Eerst zal er ten aanzien van de te behandelen leerstof stabilisatie in de opvattingen dienen te ontstaan. De didactische beschouwingen die men in dit boek verspreid aantreft maken het echter reeds tot een waardevol bezit ook van de wiskundeleraar bij ons voortgezet onderwijs.
De Gründlichkeit van dit overzichtelijk geschreven werk kan de lezing ervan voor hem tot een genot maken, maar ik vrees, dat er tal van onderwijzers in functie zullen zijn, voor wie de bestudering ervan zonder bijzondere begeleiding te zwaar zal vallen, hoezeer ook de auteur naar eenvoud van behandeling heeft gestreefd. Van axiomatische fundering wordt afgezien (ook al verschijnen aan het slot de Peano-axioma's ten tonele), op intuitie en aanschouwing wordt een beroep gedaan. Leerpsychologisch zoekt Griesel aansluiting bij Dienes, bij Piaget, bij Papy.
De auteur stelt zich voor dat geïnteresseerde ouders met het oog op de hulp die ze hun kinderen graag bij het huiswerk zouden willen geven dit werk met succes zullen kunnen bestuderen 'da eigentlich keine mathematische Kenntnisse vorausgesetzt werden'. Ik deel deze illusie niet: als alle mathematische voorkennis ontbreekt zal ook de onontbeerlijke interesse ontbreken en zal de ouder zich door de niet eenvoudige lectuur bezwaarlijk kunnen heenwerken. Maar voor leerkrachten in functie en voor aanstaande onderwijzers en leraren is Griesels werk wel van grote waarde.
De typografische verzorging voldoet aan de hoogste eisen.
In vakbibliotheken van onze scholen en van de wiskundedocenten persoonlijk is het werk ongetwijfeld op zijn plaats.

Joh. H. Wansink

Dr.Ir.H.W. Hoogstraten, *Mathematische modellen*, openbare les, Uitg. Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971.

De auteur schenkt in deze openbare les aandacht aan het omzetten van technische problemen en fysische verschijnselen in mathematische modellen. Hij merkt in zijn inleiding op dat dit een fundamenteel onderdeel van de toegepaste wiskunde is en schetst in het vervolg waarom men in de praktijk zo'n grote belangstelling voor mathematische modellen heeft. Hierbij worden diverse redenen van economische en wetenschappelijke aard genoemd. Daarna wordt geschetst hoe mathematische modellen worden geconstrueerd. Een mathematisch model moet aan de volgende twee voorwaarden voldoen:

1e. Het moet de werkelijkheid zo goed mogelijk weergeven;
2e. Het moet wiskundig (d.w.z. exact analytisch of numeriek of eventueel in asymptotische benadering) oplosbaar zijn.

In de praktijk is bijna altijd sprake van een compromis tussen deze twee eisen. Men bedient zich van schematizeringen, die soms heel ver gaan, vooral als het in de eerste plaats om kwalitatieve informatie gaat.
De auteur licht zijn beschouwingen toe aan de hand van twee voorbeelden uit de praktijk. Het eerste probleem betreft het ontwerpen van een sproeibus, zoals deze bij beregeningsinstallaties gebruikt wordt. Als de sproeiers op gelijke onderlinge afstand geplaatst worden, hoe moet dan de dikte van de buis variëren om voor alle sproeiers dezelfde uitstroomsnelheid te bereiken? Dit probleem blijkt na enige voor de hand liggende schematizeringen eenvoudig numeriek op te lossen.

Het tweede probleem betreft de bepaling van de invloed van de scheepsvorm op de weerstand die een varend schip in kalm water ondervindt. Dit leidt tot een stelsel van vier partiële

niet-lineaire differentiaalvergelijkingen in vier onbekenden, dat pas na vergaande schematizering en linearizering wiskundig oplosbaar is. Bovendien blijkt de aldus verkregen oplossing in de praktijk niet helemaal bevredigend te zijn, zodat dit probleem de technische wetenschappers nog steeds bezig blijft houden.

T.J. Dekker

Wiskunde/De Rij/ 1 door Robert Broeckx, 2 door Robert Broeckx, 3 door Robert Broeckx en Eddy van Eyck, 41 door Raymond Broeckx en Robert Broeckx, De Nederlandsche Boekhandel, Antwerpen, 1968-1971, resp. 230, 347, 410, 164 blz., prijs resp. 160 BF, 245 BF, 335 BF, 140 BF.

De Rij is een serie leerboeken geschreven voor het Vlaams middelbaar onderwijs. Deel 1 is bestemd voor de zesde klas, deel 2 voor de vijfde, enz. De delen 4, 5 en 6 zullen in subdelen gesplitst worden. De serie staat onder redactie van Dr. Raymond Broeckx. De eerste drie delen zijn in hoofdzaak geschreven door zijn broer Robert Broeckx en het derde deel ook door E. Van Eyck. De recensie betreft alleen nog maar de delen 1 – 3 en het eerste subdeel van deel 4. De auteurs zijn, met uitzondering van de heer Robert Broeckx, leden van de Nederlandstalige Commissie voor de Vernieuwing der Wiskundeleerplannen.

Laat ik beginnen op te merken, dat de boeken een zeer goed verzorgde indruk maken, dat de auteurs getracht hebben hun taal en hun uiteenzettingen sober te houden en de inhoud van het nieuwe programma op didactisch gelukkige wijze aangepast hebben aan het bevattingsvermogen van de leerlingen.

Graag wil ik enkele verspreide opmerkingen maken, niet zozeer om het beter te weten, maar om te tonen, dat ik de boeken beslist met belangstelling gelezen heb.

In deel 1 heb ik me afgevraagd of het laatste hoofdstuk 'Kennen we dit nog? ' geen concessie was aan vroegere tijden. Heeft het zin de breuken uit de lagere school te repeteren, voordat ze in een later deel weer officieel geïntroduceerd worden?

Met instemming heb ik gemerkt, dat de auteur de samenstelling van relaties, die geen functies zijn, nauwelijks de moeite van het bespreken waard vindt.

De meetkunde is, de Belgische traditie getrouw, axiomatisch opgezet, maar gemitigeerd axiomatisch. Op aanschouwelijke gronden is het halfvlak ingevoerd. En zonder meer wordt aangenomen, dat de diagonalen van een parallellogram een snijpunt hebben. Dit geschiedt op pag. 49 en pag. 65. Niet zonder verbazing las ik op pag. 67 en 68 toch twee axioma's van de ordening. Zijn deze nu nog wel nodig?

De auteur houdt eraan vast, dat vector synoniem is voor translatie. Alleen als men de term vector gebruikt, schrijft men de samenstelling door middel van het symbool +. Het is natuurlijk volkomen goed, maar is het didactisch verantwoord? Op pag. 102 wordt een vector geprojecteerd. Welke leerling zou het nu nog begrijpen, als de leraar zei: ik projecteer een translatie? Maar als men alles nauwkeurig leest, is het voor de leraar correct.

Op pag. 128 heb ik niet begrepen, dat $\frac{4}{1} = 4$. En als ik me niet vergis, is hier een kleine omissie in het betoog.

De strijd in België met betrekking tot de wenselijkheid eerst de rationale en daarna de reële getallen in te voeren of andersom, is door de auteur beslist ten gunste van het eerst invoeren van de rationale getallen.

In deel 2 komen de reële getallen even ter sprake; in deel 3 krijgen ze de volle aandacht. De theorie beslaat ongeveer 30 blz. Nu is zoveel apparaat aanwezig, dat de wiskundige theorieën tot ontplooiing kunnen komen. Vectorruimte, reële functies, grafieken, stelsels vergelijkingen komen aan de orde. Niet begrepen heb ik, waarom speciale aandacht besteed wordt aan de veeltermen. In deel 2, blz. 185 e.v. kwamen deze reeds aan de orde. Ik zie hier weinig nieuws, behalve dan dat er ook sprake is van veeltermfuncties en dat veeltermen nu $f(x)$ genoteerd worden. Essentieel is dit m.i. niet.

De tweede helft van deel 3 is aan de meetkunde gewijd. De isometrieën worden uitvoerig besproken, daarna komt de definitie van de lengte van een lijnstuk en de cirkel. De

goniometrie is op tamelijk orthodoxe wijze behandeld door uit te gaan van een eenheidscirkel. Cosinusregel en Pythagoras worden vectorieel afgeleid en op grond van de zo verkregen meetkundige inzichten wordt de existentie van de vierkantswortels aangetoond.
In het vierde deel, waarvan nog alleen de eerste helft verschenen is, wordt eerst een exposé gegeven over enkele logische grondbegrippen. Het hoofdstuk is simpel en duidelijk gehouden. Daarna komen opnieuw de reële getallen aan de orde. Ditmaal wordt echter de korte axiomatische weg bewandeld. De axioma's van een geordend lichaam worden opgesteld (zonder het axioma van Archimedes en zonder het continuïteitsaxioma). Daarna worden uitgaande van de reële getallen resp. de natuurlijke, de gehele en de rationale getallen gedefinieerd. Men vraagt zich af, of het werkelijk noodzakelijk is de reële getallen tweemaal streng in te voeren. Kan men niet veel energie besparen door de eerste keer een intuïtieve inleiding te geven en te verwijzen naar een latere strenge behandeling?
Een groot deel van het boek is ten slotte gewijd aan de machten en wortels, de logaritmen, de logaritmentafel en de rekenliniaal.
Ik zou ten slotte collega Broeckx, die ook in ons land geen onbekende is, willen gelukwensen met het tot stand komen van dit goed doordachte schoolboek.

P. G. J. Vredenduin

Walter Breidenbach, *Methodik des Mathematikunterrichts in Grund- und Hauptschule,* Band 1, *Rechnen,* 320 blz., geb. DM 19.80, Schroedel Verlag, Hannover, 1969.

Prof. Breidenbach behandelt in dit boek de problematiek van de ombouw van het traditionele rekenonderwijs naar een aan moderne inzichten aangepast wiskundeonderwijs. Door zijn *Methodik des mathematischen Unterrichts* (1950) had de auteur ook in Nederland reeds enige bekendheid verworven, terwijl hij door zijn *Rechnen in der Volksschule* in de laatste decennia grote invloed op het rekenonderwijs in Duitsland heeft gehad. Dat de auteur zich minder extreem opstelt dan bijvoorbeeld Papy in België wordt reeds geïllustreerd door het feit, dat hij de door hem besproken verzamelingenleer eerst voor het vijfde schooljaar in aanmerking wil doen komen. Zijn overzicht over dit onderwerp is systematisch, overzichtelijk, helder en heeft ook voor de Nederlandse wiskundeleraar grote waarde.
In het tweede hoofdstuk komen methodisch-didactische beschouwingen aan de orde met betrekking tot het rekenonderwijs op de basisschool. Er wordt aandacht besteed aan enige werkvormen, in het bijzonder aan zelfwerkzaamheidsmethoden ('forschender Unterricht'). De auteur acht het 'gebunden Unterrichtsgespräch' spil voor het onderwijs. Hij belicht de isomorfie die er kan worden aangewezen tussen wiskundige structuren enerzijds en de structuren van tal van spelsituaties anderzijds. Bindende voorschriften voor de didactische structuur van het onderwijs kan de psychologie niet geven. Ons onderwijs dient echter steeds 'sachgerecht' èn 'kindesgemäss' te zijn.
In het derde hoofdstuk vinden we naast de opvattingen van Dienes, waarvoor ook in ons land terecht de belangstelling stijgt, besprekingen voor van het Frankfurter Projekt en van de rekenstaafjes van Cuisenaire. Voorts wordt er de leerstof voor de vier eerste leerjaren uitvoerig in besproken.
Het vierde hoofdstuk *Zur Hauptschule* behandelt een reeks van problemen die mede voor de onderbouw van het Nederlandse v.o. van belang zijn. Veel aandacht wordt besteed aan het breukbegrip; ook binaire decimale breuken worden besproken. Voorts de rekenliniaal, eenvoudige vergelijkingen met één of met twee onbekenden, enige statistiek en vrij indringend de diverse relaties.
De omstandigheid dat de auteur oog heeft voor de historische aspecten van de didactiek en tal van onderwerpen vanuit internationaal gezichtspunt weet te belichten maakt dat deze didactiek van waarde is voor de Nederlandse wiskundeleraar.
In elke vakbibliotheek is het werk op zijn plaats.

Joh. H. Wansink.

Dr.S.T.M. Ackermans en dr.J.H. van Lint, *Algebra en Analyse*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1970.

De beide auteurs hebben de inhoud van hun colleges, bestemd voor studenten met hoofdvak wiskunde aan de T.H. te Eindhoven in de eerste vijf semesters, voor een bredere kring van belangstellenden ter beschikking willen stellen.

Deze cursus is duidelijk gericht op exactheid en correcte formulering en legt minder accent op vraagstukkenroutine en toepasbaarheid van de leerstof.
Het blijkt dat achtereenvolgens aan de orde komen:
I Verzamelingen en Afbeeldingen
II Relaties (equivalentie- en ordeningsrelaties)
III Algebra (groepen, ringen, lichamen, lineaire algebra)
IV Reële en Complexe getallen
V Topologische en metrische ruimten
VI Differentiaalrekening
VII Integraalrekening (o.a. differentiaalvergelijkingen)
VIII Integreren in het complexe vlak

Naar mijn mening is dit boek uitermate geschikt voor elke docent die binnenkort in de twee hoogste leerjaren van het v.w.o. zowel wiskunde I als wiskunde II gaat doceren.
In kort bestek is hier bijeengebracht de leerstof die vele examenkandidaten in het eerste jaar na het behalen van het diploma voorgezet krijgen, zowel aan elke T.H. als aan de faculteiten der wis- en natuurkunde.
Derhalve dient elke docent hiervan kennis te nemen opdat de grote afstand tussen v.h.m.o.-wiskunde enerzijds en universitaire-wiskunde anderzijds tot een minimum kan worden teruggebracht.
De beknoptheid van het behandelde en de gesignaleerde exacte formulering maken dit boek tot een goede handleiding voor moderne wiskunde.
De toegevoegde vraagstukken bevatten goed oefenmateriaal om de ingevoerde begrippen te leren hanteren.
De auteurs wensen de gebruikers in hun voorwoord een vruchtbare studie toe.
Ongetwijfeld zal de bestudering van dit leerboek vele vruchten afwerpen, niet alleen ten behoeve van het eigen inzicht, maar ongetwijfeld ook ten gunste van de leerlingen die een deel van deze leerstof op hun niveau te verwerken krijgen.

Westerhof

Didactische literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

The Mathematics Teacher, LXIII[6]-LXIV[5], october 1970-mei 1971.

S.I. Williams, A progress report on the implication of the recommendations of the Commission on Mathematics;
P. T. Mielke, Rational points on the number line;
N. T. Gridgeman, Elliptic parallels;
Ch. M. Bundrick, e.a., Developing of finite geometry;
I. J. Lach, Report of a study on the use of programmed workbooks;
R. Shloming, Thâbit Ibn Qurra and the Pythagorean theorem.

J. M. Laible, Try graph theory for a change;
J. F. Leetch, A dialogue on inverse functions;
K. Cummins, Mathematics 'in statu nascendi";
J. Wilkonson, Teaching general mathematics: a semi-laboratory approach;
R.B. Kane, The readability of mathematics textbooks revisited;
Th.J. Lehpamer, Moment of inertia problem – a classroom paradox;
Th. W. Smithson, Computer-oriented mathematics: an Eulerian development for pi;
A. Day Bradley, Al-Biruni's table of chords;
P. J. Zwier, Multidudinous kinds of counting numbers.

H. van Engen, Strategies of proof in secondary mathematics;
M.J. Kenney, Factor lattices;
R. Singer, Modular arithmetic divisibility criteria;
H. Sitomer, Motivating deduction;
S. M. Smith, Two unusual representations for the set of real numbers;
E.F. Oakwood, Improving the witch;
Fr. A. Anderson, Translation of axes discovered through the overhead projector;
P. H. Nygaard, Fibonacci-type sequences;
R. Daniels, A space to live in;
Ph. E. Johnson, The early beginning of set theory.

B. E. Meserve, The NCTM and the two-year colleges;
V. C. Harris, On proofs of the irrationality of $\sqrt{2}$;
J. K. Bidwell en B. K. Lange, Girolamo Cardano, a defense of his character;
B. Greenberg, That area problem;
J. F. Kregg, Formulation of the differentiation algorithm;
R. H. Gast, The high school geometry controversy; is transformation geometry the answer?

A. Barnett, The fascination of whole numbers;
R. A. Carman, Mathematical mistakes;
G. B. Mercer en J. R. Kolk, New mathematics for a new college;
J. Grocening, Induction fallible but valuable;
M. R. Wiscamb, A non-field;
R. E. Kennedy, Divisibility by integers ending in 1, 3, 7, 9;
H.S. Hughes, Gauss, computer-assisted;
A. Pederson, A surveyor's problem.

D. J. Foreman en W. A. Mehrens, National assessment in mathematics;
Th. H. Macdonald, Truthtable models of Mendelian trait segregation;

B. Henry, Developing an algebra by discovering;
S. Assad, From graph to formula;
A. L. Hess, Viewing diagrams in four dimensions;
N. Grant, Mathematics on a pooltable;
J. Fishman, Mathematics in secondary school vocational education programs.

M. S. Bell, Mathematical models and applications as an integral part of a high school algebra class;
D. J. Dessart, To tip a waiter: a problem in unordered selection with repetitions;
St. Krulik, Using flow charts with general mathematics classes;
J. E. Eagle, Helping students to see the patterns;
N. Mann, A discovery lesson on matrix inverses;
W. R. Arnold, Students can pose and solve original problems;
J. T. Fey, Probability, integers, and pi;
V. P. Hansen, Films, slides and filmstrips;
D. Merriell, Nim and natural numbers;
N. T. Gridgeman, Latin-square tiling;
R. T. Atherton, Solving absolute-value problems;
H. Ruchlis, Putting reality into mathematics.

R. M. Exner en P. J. Hilton, Should mathematical logic be taught formally in mathematics classes?
W. R. Franta, Computer arithmetic;
D. R. Byrkit, Taxicab geometry, a non-euclidean geometry of lattice points;
H. E. Williams, Some mathematical models used in plastic surgery;
L. Leake, Distribution of the mean;
B. M. Oliver, The pattern of pythagorean numbers;
W. Ellis, Sequences and progressions;
A. J. Picard, Some observation on graphing in modular systems;
K.O. Sowell en J. Ph. McGreffey, Nondecimal slide rules.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Van Wassenaer-heuvel 73, Oosterbeek.

268 Arthur, Bert en Gerard zijn de kapitein, de stuurman en de kok van een schip.
1 Bert is niet zwaarder dan Arthur.
2 De kok is zwaarder dan Gerard.
3 Bert is ouder dan Gerard.
4 De kok is zwaarder dan de kapitein.
5 De kapitein is ouder dan de stuurman.
6 Gerard was op school al veel slimmer dan Bert; als Gerard stuurman is, is Bert dus zeker kapitein.
7 Een van de drie is de oudste, maar dat is de kok niet.

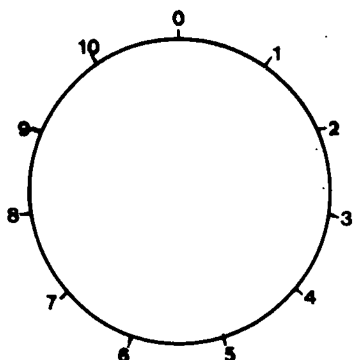
Vragen

1 Wie is kapitein, wie stuurman en wie kok?
2 Is het zevental gegevens onafhankelijk? En zo niet, vind dan alle onafhankelijke deelverzamelingen ervan.
(K. Popp, Delft)

269 Een dominospel bestaat uit alle stenen vanaf 0-0 tot en met *n-n*. Bij het domineren bestaat de langste rij, die men krijgen kan, uit 243 stenen. Bereken *n*. (B. Kootstra)

Oplossingen

266 Vallen uur-, minuut- èn secondewijzer samen op een ander tijdstip dan 0 uur precies? Zelfde vraag als de halve dag uit een van 12 verschillend geheel aantal uren zou bestaan.
De plaatsen, waar uur- en minuutwijzer samenvallen, zijn de hoekpunten van een regelmatige 11-hoek (zie fig.). De eerste keer na 0 uur vallen zij samen in het punt 1. De secondewijzer loopt 60 maal zo snel als de minuutwijzer en bevindt zich dan dus in het punt 60 (mod 11) = 5.
Bij de tweede keer samenvallen bevinden zij zich resp. in de punten 2 en 10, de derde keer in de punten 3 en 15 (mod 11) = 4. Enz. Elke keer komt de secondewijzer daarbij 4 op de minuutwijzer voor. Omdat 4 en 11 geen factor gemeen hebben, zal eerst na 12 uur de secondewijzer weer met de minuutwijzer samenvallen.



Onderstel nu, dat de halve dag bestaat uit n uren.
Dan vallen de punten van samenvallen van uur- en minuutwijzer in de hoekpunten van een regelmatige $n - 1$-hoek. De eerste keer bevindt de minuutwijzer zich in het punt 1 en de secondewijzer zich dus in het punt 60 (mod $n - 1$). Telkens komt de secondewijzer dus 59 (mod $n - 1$) voor op de minuutwijzer. Ze vallen ook in een ander punt dan het hoekpunt 0 samen, dan en alleen dan als 59 (mod $n - 1$) en $n - 1$ een factor gemeen hebben. Dus als $n - 1$ deelbaar is door 59. Voor n vinden we de waarden 1, 60, 119, 178, ...

267 Maak een magisch vierkant van 9 niet noodzakelijk verschillende natuurlijke getallen zo, dat de produkten van elke rij, van elke kolom en van elke diagonaal 10^{12} is. Hoeveel verschillende oplossingen zijn er mogelijk? Twee oplossingen heten verschillend, als ze niet door spiegeling of rotatie uit elkaar kunnen ontstaan.

$10^{12} = 2^{12} \cdot 5^{12}$. We beschouwen de factoren 2 en de factoren 5 afzonderlijk. De exponenten van 2 en ook die van 5 zullen dan eveneens een magisch kwadraat vormen, maar nu een waarvan alle sommen gelijk aan 12 zijn. Als we beginnen met

$$\begin{matrix} a & b & \cdot \\ \cdot & c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

en telkens tot 12 aanvullen, zien we zonder moeite, dat $c = 4$ moet zijn.
De mogelijke kwadraten krijgen dan de vorm

$$\begin{matrix} a & b & 12 - a - b \\ 16 - 2a - b & 4 & 2a + b - 8 \\ a + b - 4 & 8 - b & 8 - a \end{matrix}$$

Omdat alle getallen groter dan of gelijk aan 0 moeten zijn, vinden we de volgende mogelijkheden:

$a = 0$	$b = 8$	$a = 5$	$0 \leqslant b \leqslant 6$
$a = 1$	$6 \leqslant b \leqslant 8$	$a = 6$	$0 \leqslant b \leqslant 4$
$a = 2$	$4 \leqslant b \leqslant 8$	$a = 7$	$0 \leqslant b \leqslant 2$
$a = 3$	$2 \leqslant b \leqslant 8$	$a = 8$	$b = 0$
$a = 4$	$0 \leqslant b \leqslant 8$		

In totaal dus 41 mogelijkheden. Omdat elk magisch kwadraat van exponenten van 2 gecombineerd kan worden met elk kwadraat van exponenten van 5, krijgen we zo $41^2 = 1681$ oplossingen. We moeten nu nog nagaan, hoeveel verschillende daaronder begrepen zijn.
We beschouwen eerst alleen het kwadraat met sommen 12. Eén der oplossingen bestaat uit alleen 4'en. Deze oplossing laten we verder buiten beschouwing.
Van de overige hebben als symmetrieas
de diagonaal van links boven naar rechts onder de kwadraten met $a + b = 8$ (dat zijn er 8),
de andere diagonaal die met $a = 4$ (dat zijn er 8),
een verticale lijn die met $2a + b = 12$ (dat zijn er 4),
een horizontale lijn die met $b = 4$ (dat zijn er 4)
Oplossingen die door rotatie in zichzelf overgaan, zijn er niet.
De magische kwadraten met constant produkt 10^{12} hebben dus (als we afzien van het kwadraat, dat uit alleen getallen 10^4 bestaat) een symmetrieas, als ze ontstaan uit twee kwadraten van de voorgaande soort met dezelfde symmetrieas of uit een kwadraat met symmetrieas en een kwadraat, dat uit uitsluitend 4'en bestaat. We vinden zo
$$(8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2) + 2\,(8 + 8 + 4 + 4) = 208$$
kwadraten met symmetrieas en dus
$$1680 - 208 = 1472$$
kwadraten zonder symmetrieas. Zodat we in totaal
$$208 : 4 + 1472 : 8 + 1 = 237$$
verschillende oplossingen krijgen.

een wiskundige als actuaris

Wat is en doet het GAK

De maatschappelijke ontwikkeling heeft geleid tot het recht op een inkomen voor iedereen, ook wanneer men niet kan werken of niet meer behoeft te werken. Dit recht is vastgelegd in een groot aantal wetten. Sommige van deze wetten worden uitgevoerd door bedrijfsverenigingen. Voor 14 van deze bedrijfsverenigingen voeren wij de administratie.
Wij zijn opgericht door centrale organisaties van werkgevers en werknemers - dus geen overheidsinstelling - en werken niet alleen voor deze 14 bedrijfsverenigingen, maar verrichten ook alle actuariële werkzaamheden voor 21 bedrijfspensioenfondsen. Wij hebben een hoofdkantoor in Amsterdam en 26 districtskantoren in het hele land.

Wat vraagt en biedt het GAK

De eerder genoemde 21 bedrijfspensioenfondsen omvatten ca. 400.000 deelnemers en een totale premiereserve van f 2.000.000.000,-. Onze wiskunde-afdeling, die alle actuariële werkzaamheden verricht, fungeert onder de actuaris van onze organisatie. Aan deze actuaris willen wij gaarne een Drs. Wiskunde toevoegen, die aan de werkzaamheden en de dagelijkse leiding van de wiskunde-afdeling deelneemt.
Wij stellen hem ruimschoots in de gelegenheid zich op de levensverzekeringswiskunde in te werken. De aan te stellen funktionaris kan rekenen op een all-in salaris van rond de f 40.000,-, een uitstekende pensioenvoorziening en moderne secundaire werkvoorwaarden.

Wat wilt u nog weten

Nadere funktie-informaties zullen gaarne worden verstrekt door de actuaris van onze organisatie Drs. J. K. de Liefde (020-21 51 51, toestel 2440 - privé 020-41 69 87), met wie u tevens een gesprek kunt arrangeren als u in deze funktie bent geïnteresseerd.



GAK

Bos en Lommerplantsoen 1, Amsterdam-W.

Inhoud